Math. P. 743 s

<36607896260010

<36607896260010

Bayer. Staatsbibliothek

Math. P. 743ᵃ

Christian Riesen's

Der fr. Künste und Weltweisheit Doctors, und der kuhrpfälzischen ökon. Gesellschaft Mitgliedes

Rechenkunst

für Sehende und Blinde.

Mannheim,
in der Hof- und akademischen Buchdruckerei 1773.

K. B. ARTILLERIE REGIMENT PRINZ LUITPOLD

Gd 1691523

78 BS dis

3 - JUN - 2
Copy 1955

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Dem

Durchleuchtigsten Fürsten
und Herrn,

Herrn

Karl Theodoren,

Pfaltzgrafen bei Rheine, des heil. römischen Reiches Erzschatzmeister und Kuhrfürsten, Herzoge in Baiern, zu Gülich, Kleve und Bergen, Fürsten zu Mörs, Marquisen zu Bergen op Zoom, Grafen zu Veldenz, Sponheim, der Mark, und Ravensberg, Herrn zu Ravenstein. u. s. w.

meinem gnädigsten Kuhrfürsten und Herrn.

Durchleuchtigster Kuhrfürst, gnädigster Fürst und Herr!

Euere kuhrfürstliche Durchleucht haben meinem blinden Schüler gnädigst erlaubet, vor Höchstdenselben eine Probe seiner Kenntnisse in der Rechenkunst abzulegen. Das gnädigste Wohlgefallen, welches Euere kuhrfürstliche Durchleucht über dessen Fertigkeit gezeiget haben, ist mir ein Trieb gewesen, dieses kleine Werk Höchstdenselben zu Füsen zu legen.

Mensch-

Menschen- und Wissenschafts-
liebe haben sich in Euerer kuhrfürst-
lichen Durchleucht so genau mitein-
ander verpaaret, daß ich nicht zweif-
ele, Höchstdieselben werden es
gnädigst aufnehmen. In dieser Zu-
versicht ersterbe ich mit tiefester Ehr-
furcht

Euerer kuhrfürstlichen
Durchleucht

unterthänigstgehorsamster
Christian Niesen.

Vorrede.

Obschon keine Wissenschaft so nützlich und nothwendig ist als die Rechenkunst: so findet man doch Wenige, die eine gehörige Kenntniß darin besitzen. An Rechenbüchern fehlet es zwar nicht; deren haben wir mehr als zu viel. Allein die meisten beschäftigen sich nur mit der Schale, ohne das Innere zu berühren. Ein fürchterlicher Haufen von Exempeln, welche aus Mangel gehöriger Erklärungen und

Beweise mehr verwirren als belehren, machet oft das ganze Buch aus. Die gründlichsten sind noch diejenigen, welche zu den Anfangsgründen der mathematischen Schriften gehören. Sie werden aber wegen ihrer Kürze und Lehrart denen unbrauchbar, welche die mathematische Sprache nicht verstehen. Zudem wird das meiste erst in der Buchstabenrechenkunst abgehandelt. Da nun die erste Gattung von Lehrbüchern unzulänglich ist; die zweite aber von dem, der die algebraische Rechnungen nicht versteht, nicht benutzet werden kann: so habe ich es gewaget, die Rechenkunst für jedermann nützlich und brauchbar zu machen. Selbst diejenigen, die sich auf die Mathematik legen wollen, werden darin nichts vermissen, was man dazu brauchet. Alle Rechnungen

haben ihre Beweise. Vielleicht wird man sich verwundern, darin Sachen abgehandelt zu finden, die man in einer gemeinen Rechenkunst nicht vermuthet hätte.

Weil ich für deutsche Anfänger und zugleich für Blinde schreibe, wovon kaum der hundertste Latein versteht: so war es ganz natürlich, dieses Werk in einem ganzen deutschen Kleide auftreten zu lassen. Es ist bekannt, welche Hinderniß daraus entsteht, wenn der Lehrer sich einer Sprache bedienet, die der Lehrling nicht versteht. Wie viel Zeit geht nicht verloren, ein unbekanntes Wort in das Gedächtniß zu bringen, und gehörig auszusprechen, woran man nichts als die blosen Buchstaben kennet? Wie oft geschieht es nicht, daß man ein solches Wort mit groser Mühe erlernet,

und am Ende die Bedeutung nicht mehr davon weiß?

Die Kunstwörter dazu habe ich gröstentheils aus unsern vornehmsten mathematischen Schriften zusammengetragen; einen Theil davon habe ich selbst übersetzet. Denen zu gefallen, welchen die deutschen Kunstwörter fremd sein sollten, habe ich ein Verzeichniß der lateinischen aufgesetzet, und das Deutsche dazu geschrieben. Mannheim den 8 März 1773.

Inhalt.

I Hauptst. Von den Zahlen überhaupt. 1 S.

Eine Zahl aussprechen. 3

— — aufschreiben. 4

II Hauptst. Von der Zusammenziehung. 6

III Hauptst. Von der Abziehung. 13

IV Hauptst. Von der Vervielfältigung. 18

V Hauptst. Von der Theilung. 27

VI Hauptst. Von der Neunerprobe. 44

VII Hauptst. Die Rechnungsarten in benannten Zahlen. 48

VIII Hauptst. Von den Brüchen. 52

IX Hauptst. Von den zehntheiligen Brüchen. 75

X Hauptst. Von der Regel von Dreien. 80

XI Hauptst. Von der verkehrten Regel von Dreien. 104

XII Hauptst. Von der Gesellschaftsregel. 109

XIII Hauptst. Von der Vermischungsregel. 121

XIV

XIV Hauptst. Von der zusammengesetzten S.
Regel von Dreien. 130

Von der Kettenregel. 135

XV Hauptst. Von den Wurzelzahlen. 140

Die Vierecks wurzel ausziehen. 145

Die Würfelwurzel finden. 154

XVI Hauptst. Von den Staffelzahlen. 161

XVII Hauptst. Von dem Verhältnisse und Ebenmaase. 178

XVIII Hauptst. Von den Verhältnißzahlen. 183

XIX Hauptst. Von den Verbindungen. 199

XX Hauptst. Von den Vielecks zahlen. 208

XXI Hauptst. Von den Versetzungen. 216

XXII Hauptst. Anwendung der Rechenkunst für die Blinden. 218

Ver=

Verzeichniß der verdeutschten Kunstwörter.

		S.
Addendus.	Zusatz.	
Addiren.	Zusammenzählen oder = ziehen.	6
Additio.	Zusammenzählung.	
Alligationsregel.	Vermischungsregel.	121
Ambe.	Zweier, Paar.	199
Cubic. / Cubus.	Würfel, Würfelzahl.	141
Cubicwurzel.	Würfelwurzel.	
Decimalbruch.	Zehntheiliger Bruch.	75
Differentia.	Unterschied.	13
Dignitas.	Würde.	140
Dividendus.	Theilungszahl.	
Dividiren.	Theilen.	
Divisio.	Theilung.	
Divisor.	Theiler.	27

Ex-

Exponens. Namen, Zeiger. 141. 179 S.

Factor. Vervielfältiger. 18

Factum. Inhalt. 18

Logarithmus. Verhältnißzahl. 184

Multiplicatio. Vervielfältigung. 18

Multiplicator. Vervielfältiger.

Numeratio. Das Ausſprechen und Schreiben. 4

Permutatio. Verſetzung. 216

Polygonalzahl. Vieleckszahl 208

Potentia. Würde. 140

Productum. Inhalt. 18

Progreſſio. Staffelreihe. 116

arithmetica. Unterſchiedsreihe.

geometrica. Theilungsreihe. 162

Proportio. Ebenmaas. 179

arithmetica. Unterſchiedsebenmaas.

geometrica. Theilungsebenmaas.

continua. ſtetiges. 180

Proportio discreta. Getrenntes Ebenmaas. 180

Quadratum. Viereck, Viereckszahl. 141

Quadratwurzel. Viereckswurzel.

Quadriren. Zum Vierecke machen.

Quaterne. Vierer. 199

Quotiens. Antheil. 27

Quotus. Antheil.

Subtractio. Abziehung. 13

Subtrahendus. Abzug.

Subtrahiren, Abziehen.

Terne. Dreier. 199

Eingeschlichene Fehler.

Auf der 5 Seite 6 Zeile lese man statt 408 — 804

60	4 von unten		9	8
64	8 von unten		$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$
74	5		$\frac{18}{8}$	$\frac{18}{6}$
89	3		34	38
97	8		$1\frac{2}{5}$	$2\frac{2}{5}$
98	12		$888\frac{8}{9}$	$8888\frac{8}{9}$
115	3 von unten		A, B	B, C
137	5 von unten muß + in × verwandelt werden.			

Bayerische Staatsbibliothek München

Die Rechenkunst.

I Hauptstück.

Von den Zahlen überhaupt.

I §.

Die Rechenkunst ist eine Wissenschaft, unbekannte Zahlen aus bekannten zu finden.

2 §. Eine Zahl ist die Sammlung etlicher Einheiten von einerlei Art. Dinge von einerlei Art sind diejenigen, welche einerlei Namen haben; weßwegen sie auch **gleichnamige** Dinge genennet werden.

3 §. Die ersten zehn Zahlen haben ihre eigenen Namen, und bedeuten blose Einheiten, die man **Einser** nennet. Zehn Einser machen eine zusammengesetzte Einheit aus, die **Zehner** heist. Zehn Zehner geben eine neue Einheit, die aus Zehnern besteht, und

den Namen **Hundert** führet. Bringt man von den Hunderten zehen zusammen: so heißt diese Einheit **Tausend**, welche auf zehntausend, hunderttausend, tausendmal tausend erwachsen kann. Tausendmal tausend bekömmt den Namen **Million**. Millionmal Million heißt **Billion**; millionmal Billion, **Trillion** u. s. w. Alle diese Zahlen sind Einheiten von verschiedener Art, und entspringen von den Einsern dergestalt, daß die nächstfolgende Art immer zehnmal gröser wird.

4 §. Die neun einfachen Einheiten haben ihre besondern Zeichen, die man auch Ziffern nennet, und so aussehen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, mit welchen sich alle übrige Zahlen ausdrücken lassen. Damit man aber wissen könne, was für Einheiten dadurch bemerket werden: so hat man jeder Art Zahlen ihre gewisse Stelle angewiesen, deren Ordnung von der rechten zur linken Hand weiter ausgeführet wird. In der ersten stehen die Einser; in der zweiten die Zehner; in der dritten die Hunderte; in der vierten die Tausende u. s. w. Ueberhaupt ist in der nächstfolgenden Stelle zehnmal mehr. Z. B. 4444 heißt: vier Einser, vier Zehner, vier Hunderte, vier Tausende; oder von der Linken zur Rechten: vier Tausende, vier Hunderte, vier Zehner, vier Einser. Die Zehner spricht man mit zig aus: wenn ihrer

mehr

mehr als einer vorkommen; und die Einser mit der blosen Zahl, nämlich: vier tausend, vierhundert, vierzig, vier, oder vier und vierzig. Die leeren Stellen werden mit 0 (Nullen) ausgefüllet, damit die Ordnung erhalten werde. Z. B. In vorgemeldeter Ordnung soll kein Zehner sein: so heist es 4404. In 4044 fehlet Hundert. In 4440 ist kein Einser.

Zu Tausenden gehören allso vier Ziffern, zu Hunderten drei, zu Zehnern zwo, und zu Einsern eine. So heist denn 2000, zweitausend; 200, zweihundert; 20, zwanzig; 2, zwei; eben so, wie in 2222, welche Zergliederung in der Folge gute Dienste thun wird.

5 §. Eine geschriebene Zahl aussprechen.

Man fängt von der rechten Hand an, die Zahl durch Beistriche abzutheilen, daß jede Abtheilung aus dreien Ziffern bestehe. Eine solche Abtheilung wird Hunderte, Zehner und Einser vorstellen. Die Einser in der ersten Abtheilung zur Rechten werden schlechthin ausgesprochen; die andern bekommen den Namen der Tausende. Das erste Tausend nach zwoen Abtheilungen wird in Million verwandelt, und durch ein Strichlein bemerket. Zur Billion kommen auch zwo Abtheilungen, und sie wird mit zweien Strichlein bemerket. Z. B. 76035700648 soll ausgesprochen werden. Die Abtheilungen

sind: 76,035,700,648. Die erste zur Linken heist: 7zig 6 (sechs und 7zig); die zweite, 3zig 5; die dritte, 7 hundert; die vierte, 6 hundert 4zig 8. Weil alle Einser, ohne den lezten, Tausend sein sollen: so heist die Zahl: siebenzig sechstausend, dreißig fünftausend, siebenhundert tausend, sechshundert vierzig acht (acht und vierzig). Das zweite Tausend wird in Million verwandelt, das vierte in Billion, und die Zahl 76,035′,700,648 heist: siebenzig sechstausend, dreißig fünf Millionen, siebenhundert tausend, sechshundert vierzig acht. Oder sechs und siebenzig tausend, fünf und dreißig Millionen, siebenhundert tausend, sechshundert, acht und vierzig.

6 §. Eine Zahl aufschreiben.

Man schreibe die Zahl hin, wie man sie hersagen höret. Nach Tausend, Million, Billion u. s. w. machet man einen Strich; oder man machet einen Beistrich vor jedes Hundert. Z. B. wie schreibt man siebentausend Millionen, achthundert, 4 tausend, drei? Man schreibe 7 alsbald hin, und danach einen Beistrich; weil es 7 tausend sein soll. Darauf müssen Hunderte, Zehner und Einser folgen. Weil keine davon angegeben werden: so schreibt man so viel Nullen, und wieder einen Beistrich, wo die Million bemerket wird. Bis hieher sieht die Zahl so aus 7,000′.

Nun

Nun heist es weiter: acht hundert. Man schreibe dann 8 alsbald zu den andern, und merke auf die folgenden Ziffern, wovon der Zehner 0 bekömmt, und 4 zu den Einsern geschrieben wird, die aber hier Tausende sind. Die Zahl ist nun 7,000′,408. Es wird nichts weiter angegeben, als noch 3: so sind die drei lezten Ziffern 003, und die vollständige Zahl ist 7,000′,804,003.

7 §. Der ganze Kunstgriff besteht darin, daß man hundert zu schreiben wisse, worauf man nur im Aussprechen Acht gibt. Es ist auch noch wohl zu merken, daß man den Beistrich zwischen beide Zahlen machet: wenn die Hunderte mit zehn angegeben werden. Z. B. achtzehnhundert sieht so aus: 1,800.

8 §. Nun hat man gesehen, wie es möglich ist, alle Zahlen mit 9 Ziffern auszudrücken. Denn jede Stelle fasset nur 9 Einheiten. Kömmt noch eine dazu: so wird ein Zehner daraus, der alsbald in die folgende Stelle gertragen wird. Man wird deßwegen so viel Neuner finden, als man Zehner hat; weil 9 und 1 zehn ausmachet, nämlich in 47 sind 4 Zehner und auch so viel Neuner. Darin liegt der Grund der Neunerprobe, und aller andern Eigenschaften von der Zahl 9, die so wohl zur Belustigung, als zum Nutzen dienen.

9 §. Die römischen Zahlzeichen sehen folgender Gestalt aus.

I,	II,	III,	IV,	V,	VI,	VII,	VIII,	IX,	X,	XI,	XII.
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12

XX,	XXIX,	XXX,	L,	LX,	C,	D,	M.
20,	29,	30,	50,	60,	100,	500,	1000.

Die übrigen Zahlen werden durch die Zusammensetzung gebildet. Wenn eine niedrige Ziffer einer höhern zur linken Hand steht: so wird von der höhern so viel abgezählet. Steht aber die niedrige zur Rechten: so zählet sie mit. Z. B. V heist 5. IV heist 5 weniger 1, oder 4. VI heist 5 und 1, oder 6. X heist 10, und IX heist 10 weniger 1 oder 9. XI heist 10 und 1, oder 11. L heist 50, und XL heist 50 weniger 10, oder 40. LX heist 50 und 10, oder 60. u. s. w.

II Hauptstück.

Von der Zusammenziehung.

10 §. Zahlen zusammenziehen, zusammenzählen (addiren) heist viele Zahlen von einerlei Art durch eine einzige Zahl ausdrücken. Die einzige Zahl, welche viele ausdrücket, wird die Menge oder Summe genennet. Will man nur anzeigen, daß etliche Zahlen zusammengezogen werden sollen:

en: so wird zwischen diese das Zeichen + gesetzet, welches mit und ausgesprochen wird. Z. B. 2 + 3 + 4 bedeutet, daß diese Zahlen zusammengezogen werden sollen. Zween Querstriche, die übereinander und zwischen den Zahlen stehen, bedeuten die Gleichheit derselbigen. Als: 2+3+4=9, das ist: 2 und 3, und 4 ist 9 gleich, oder 2 und 3, und 4 machet 9.

11 §. Ehe man das Zusammenzählen lehret: lasse man die Summen der 9 einfachen Zahlen vollkommen auswendig lernen, die, wie folget, aussehen.

Das Eins und eins.

	und	ist		und	ist		und	ist
1	+ 1	= 2	2	+ 8	= 10	5	+ 5	= 10
1	2	3	2	9	11	5	6	11
1	3	4	3	3	6	5	7	12
1	4	5	3	4	7	5	8	13
1	5	6	3	5	8	5	9	14
1	6	7	3	6	9	6	6	12
1	7	8	3	7	10	6	7	13
1	8	9	3	8	11	6	8	14
1	9	10	3	9	12	6	9	15
2	2	4	4	4	8	7	7	14
2	3	5	4	5	9	7	8	15
2	4	6	4	6	10	7	9	16
2	5	7	4	7	11	8	8	16
2	6	8	4	8	12	8	9	17
2	7	9	4	9	13	9	9	18

12 §. Wer die Summen dieser einfachen Ziffern wohl auswendig weiß, der kann im Zusammenzählen ungehindert fort kommen: da ein Ungeübter erst lang in Gedanken, und an den Fingern nachzählen muß. Der Lehrer soll sich deßwegen hier alle Mühe geben, dieses Eins und eins seinen Lehrlingen beizubringen. Anfänglich gibt man nach eines jeden Kräften wenig auf, und fährt langsam fort, bis alles gefasset ist. Durch verschiedene Vortheile suchet man ihnen darin eine Fertigkeit beizubringen. Hat man es mit Kindern zu thun: so machet man ihnen den Begriff von jeder Zahl sinnlich: indem man dieselbige durch Striche, oder andere Dinge vor Augen leget, damit der Eindruck davon desto schärfer, und dauerhafter werde. Nach dem lehret man mit 10 steigen, und übet sie darin durch fleisiges Fragen. Z. B. 4 und 10? — macht 14. Noch 10 dazu? — macht 24. Noch 10? — macht 34. u. s. w. Nach solcher Uebung schreitet man mit Nutzen zur Zusammenziehung.

13 §. Verschiedene Zahlen zusammenziehen.

Man setzet Einser und Einser, Zehner und Zehner; Hunderte und Hunderte u. s. w. nach ihrer Art untereinander. Alsdann machet man einen Strich darunter. Bei den Einsern fängt man an, und zählet sie zusammen.

en. Die Summe davon wird unter den Strich gesetzet. Hat die Summe mehr, als eine Ziffer: so schreibt man nur die Einser hin: und behält die andern im Sinne, bis sie zu den Zehnern gezählet werden. Bei den folgenden Reihen verfährt man eben so. In der letzten Reihe wird nichts mehr aufgehoben, sondern alles hingeschrieben. Z. B. ich fange bei den Einsern an, und spreche:

285 379 407 853 690 104 ——— 2718	4 und 3 macht 7; 7 und 7 macht 14; und 9 macht 23; und 5 macht 28. Ich schreibe 8 unter die Reihe der Einser, und 2 schreibe ich neben aus oder behalte sie im Sinne: weil es ein Zehner ist, und zu den folgenden Zehnern gehöret.

Nun gehe ich zu der Reihe der Zehner, und spreche: 2 im Sinne, und 0 macht 2, und 9 macht 11; und 5 macht 16; und 7 macht 23; und 8 macht 31. Ich schreibe 1 unter die Reihe, und behalte 3 im Sinne für die folgende Reihe.

In dieser spreche ich: 3 im Sinne und 1 macht 4; und 6 macht 10; und 8 macht 18; und 4 macht 22; und 3 macht 25; und 2 macht 27. Ich schreibe diese Zahl ganz hin, weil nichts mehr folget. Es wäre allso die Summe aller dieser Zahlen 2718.

14 §. Ein fertiges Zählen macht die Arbeit leicht. Die Erfahrung lehret es, daß auch die zarte Jugend dieser Fertigkeit fähig ist. Man bedienet sich dabei einiger Vortheile, nämlich im vorigen Muster spricht man: 4 und 3 macht 7; und 7 macht 14. Hier läßt man den Zehner zurück, und zählet nur mit 4: 4 und 9 macht 13, und noch 10 dazu (welche man zurückgelassen hatte) macht 23, und 5 macht 28.

In der zweiten Reihe heist es: 2 und 9 macht 11; 1 und 5 (weil der Zehner zurückgelassen wird) macht 6, und 7 macht 13, noch 10 dazu (welche zurückgelassen war) macht 23. Davon nehme ich die 3, und spreche: 3 und 8 macht 11, macht 21 und 10 dazu macht 31. Auf gleiche Art verfährt man mit allen Zahlen. Nach einer hinlänglichen Uebung läßt man die folgende Ziffer nicht mehr Ausssprechen, sondern denken, als: 4 und 3 macht 7; macht 14; macht 23; macht 28, indem man nur mit dem Finger oder der Feder zur folgenden Ziffer im Zählen hinaufsteigt. Es versteht sich von sich selbst, daß dazu eine starke Uebung gehöre. Man fürchte aber nicht: die Zeit werde dadurch verschwendet; sie wird reichlich in der Folge eingebracht, wo man sonst mit Errathen, und am Finger Zählen die Zeit verlieren muß.

15 §. Man merke einmal für allemal den Vortheil, der aus der Ordnung der Zahlen entsteht: indem man sich im Rechnen nicht darum bekümmert, ob die Zahlen Hunderte, Zehner, oder von einer andern Art sind. Man behandelt eine, wie die andere; und setzet sie nur an ihre gehörige Stelle.

16 §. Nothwendig ist es nicht, etwas im Sinne zu behalten. Man kan auch jede Summe ganz hinschreiben. Hernach muß man aber diese Summen wiederum zusammenzählen.

```
 763
 584
 658
-----
  15
 19
18
-----
2005
```

Z. B. die Summe der Einser ist, 15; 5 steht in der Reihe der Einheiten. 19 ist die Summe der Zehner, davon 9 in der Reihe der Zehner steht. 18 ist die Summe der Hunderte, wovon 8 in der Reihe der Hunderte steht. Werden diese Summen nun wiederum zusammengezählet: so entsteht die Summe von allen.

17 §. Ohne eine zweite Zusammenzählung kann man die Hauptsumme finden: wenn man den Zehner aus jeder einzeln Summe in der Reihe mitzählet. Z. B.

763
684
658
―――
15
20
21

Die erste Reihe machet 15. Der Zehner von 15 wird alsbald zu den andern Zehnern gezählet, wovon die Summe 20 ist. Der Zehner 2 wird wieder zu seiner Reihe genommen, und gibt damit 20 aus. Da nun die Zehner von 15 und 20 schon mitgezählet worden sind: so gelten nur ihre Einser in der Ordnung, wie sie stehen, und 2105 ist die ganze Summe.

18 §. Aus dieser Zergliederung der Hauptsumme sieht man, daß der Anfang im Zusammenziehen auch bei der linken Hand gemachet werden könne, welches aus folgendem Muster erhellet.

763
684
658
―――
19
19
15
―――
2105

19 §. Die Probe der Zusammenziehung ist eine aufmerksame Wiederholung. Man kann auch von oben herunterfahren: wenn man von unten herauf gezählet hat. Kommen alsdann gleiche Summen heraus: so kann man sich wegen der Richt-

igkeit beruhigen. Neben den vorgemeldeten Sammlungsarten kann man zur Probe die Reihen stückweise nehmen, und die Summen dieser Stücke wieder zusammenzählen. Dieses Verfahren ist bei sehr langen Reihen vortheilhaft.

20 §. Aufgaben zur Uebung.

1) Wie viel gibt 11 tausend, 11 hundert, und 11? Antwort 12111.

2) Wie viel macht 12 tausend, 12 hundert, und 12? Antw. 13212.

III Hauptstück.

Von der Abziehung.

21 §. Eine Zahl von der andern abziehen (subtrahiren) heist eine Zahl um so viel verkleinern, als die andere Einheiten hat. Die Zahl, welche man abzieht, wird der **Abzug** genennet. Was nach der Abziehung übrig bleibt, heist der **Ueberschuß**, oder auch **Unterschied**; indem man durch die Abziehung findt, in wie weit beide Zahlen unterschieden sind. Die Abziehung wird mit einem Querstriche — angedeutet, und heist **weniger**. Der Abzug hat immer diesen Querstrich vor sich. Als: 8 — 2 bedeutet, daß 2 von 8 abgezogen werden solle, und heist: 8 weniger 2.

22 §. Zahlen von einander abziehen.

Man setzet Einser unter Einser, Zehner unter Zehner u. s. w. wie bei der Zusammenziehung, und zieht Einser von Einsern, Zehner von Zehnern u. s. w. ab. Der Ueberschuß wird unter den Strich gesetzet. Z. B. es

1773 } soll 1411 von 1773 abgezogen
1411 } werden. Zu diesem Ende werden
362 } die Zahlen niedergeschrieben, wie

hier zu sehen ist, und man spricht: 1 von 3 läßt 2 übrig, welche man hinschreibt. 1 von 7 läßt 6. 4 von 7 läßt 3. 1 von 1 läßt nichts übrig. Der Ueberschuß ist allso 362, oder der Unterschied von beiden Zahlen ist 362, oder die Summe ist um 262 gröser, als der Abzug.

23 §. Wenn sich zwo Ziffern aufheben, oder nichts übrig lassen: so setzet man für den Ueberschuß eine Nulle, damit die Zahlordnung nicht getrennet werde. Z. B.

342 } 2 von 2 läßt nichts übrig. Man
312 } schreibe allso 0. 1 von 4 läßt 3
30 } übrig. 3 von 3 gibt 0, oder nichts,

welches hier nicht geschrieben zu werden brauchet; weil keine Ziffer mehr zu bestimmen ist.

24 §. Zuweilen muß eine grose Ziffer von einer kleinern abgezogen werden; als-

dann

dann lehnet man eins aus der vorhergehenden Stelle, welches eins aber ein Zehner ist (3 §.). Bei der folgenden Ziffer muß man sich erinnern, daß sie um 1 kleiner ist, welches man anfänglich mit einem Tüpflein bemerken kann.

Z. B. 4 von 2 geht nicht. Man lehnet

139762	1 von 6, und spricht nun: 4
18834	von 12 läßt 8. Ich sage 12;
120928	weil 1 aus der vorstehenden

Stelle genommen, und ein Zehner ist, der mit 2 jetzt 12 ausmachet. 6 wird unten oder oben gezeichnet, um zu bemerken, daß 1 davon geborget worden sei. Ich spreche allso: 3 von 5 läßt 2. 8 von 7 geht nicht. Ich lehne 1 von 9 und spreche: 8 von 17 bleibt 9. 8 von 8 bleibt 0; weil 9 eins abgegeben hat, und nun 8 gilt. 1 von 3 bleibt 2. Nichts von 1 läßt 1.

25 §. Wird eine Zahl von 0 abgezogen: so lehnet man eins dazu, und zieht alsdann von 10 ab, und die folgende Ziffer wird um eins kleiner. Folget aber eine oder mehr Nullen: so läßt man jede derselben für 9 gelten, und die nächst darauf folgende Ziffer muß um 1 weniger genommen werden. Z. B. 4 von 6 bleibt 2. 3 von 0 geht nicht.

255000106
201256034
53744072

Sage allso: 3 von 10 bleibt 7. 0 von 0 bleibt 0. Hier nimmt man 0 anstatt 1; weil 1 schon zur ersten Nulle gelehnet worden ist. 6 von 10 bleibt 4. 5 von 9 läßt 4. 2 von 9 läßt 7. 1 von 4, anstatt 5, bleibt 3. 0 von 5 bleibt 5. 2 von 2 geht auf.

Daß die Nullen beschriebener Maaßen zu 9 werden, folget aus der Eigenschaft der Zahlen. Denn die Nulle bedeutet nur einen Platz, wo keine Ziffer steht. Man kann allso da nichts nehmen, wo nichts ist. Man geht darum zu der folgenden Stelle, um einen Zehner zu lehnen: da ist aber auch nichts. Man geht zur dritten: da ist auch nichts. Man kömmt zur vierten, worin man 5 antrifft. Von diesen nimmt man 1 für die erste Nulle, welche nun 10 gilt. Diese 10 gibt 1 ab für die zweite Nulle, und gilt nun 9, und die zweite 10. Diese gibt 1 für die dritte Nulle; und gilt alsdann 9: da die dritte in 10 verwandelt wird.

26 §. Man kann auch die Abziehung zur Linken anfangen, welches in der Theilung seinen Nutzen findet. Z. B. 4 von 7 bleibt

7006
4228
2788
267

3. 3 von 10 bleibt 7: der Ueberschuß 3 wird nun in 2 verwandelt; weil er eins für 0 hergegeben hat. 2 von 10 läßt 8. Der Ueberschuß 7 wird

wird in 6 verändert. 8 von 16 bleibt 8. Aus dem Ueberschusse 8 wird 7 gemachet, und der ganze Ueberschuß ist 2678. Bei dieser Abziehung brauchet man keine Nulle für 9 gelten zu lassen.

27 §. Eine Zahl von der andern abziehen, heist eine Zahl um so viel verkleinern, als der Abzug Einheiten hat (21 §). So viel man aber abgezogen hat: so viel war auch in der verkleinerten Zahl. Es muß allso der Abzug und Ueberschuß znsammen die verkleinerte Zahl wieder herstellen. Deßwegen ist die Zusammenzählung des Abzuges und Ueberschusses die Probe von der Abziehung. Z. B. 4328 und 2678 machen 7006.

28 §. Aufgaben zur Abziehung.

1) Jemand ist im Jahre 1689 geboren; wie alt ist er im Jahre 1773? Ant. 84 Jahre.

2) Vor 333 Jahren ist die Buchdruckerkunst erfunden worden, in welchem Jahre ist dieses geschehen? Ant. 1440.

3) Im Jahre 1444 ist der Hubertusorden gestiftet worden; wie lang ist dieses? Ant. 329 Jahre.

4) Der westphälische Friede ist nach dem 30 jährigen Kriege im Jahre 1648 geschlossen worden; wie lang ist dieses, und wann hat der 30jährige Krieg angefangen? Ant. Der Krieg hat im Jahre 1618 angefangen, und es sind 125 Jahre, daß der darauf erfolgte Friede geschlossen worden ist.

5) Der Reichstag zu Regensburg dauert schon 109 Jahre; wann hat er angefangen? Ant. im Jahre 1664.

6) Im Jahre 1386 ist die hohe Schule zu Heidelberg gestiftet worden; wie lang ist dieses bis 1773? Ant. 387 Jahre.

7) Im Jahre 1763 ist der Friede zu Hubertsburg nach dem Kriege, der 1756 angefangen hat, geschlossen worden; wie lang hat dieser Krieg gedauert, und wie viel Jahre sind schon von diesem Friedensschlusse bis hieher verflossen? Ant. Der Krieg hat 7 Jahre gedauert, und es sind schon 10 Jahre verflossen, daß der Friede geschlossen worden ist.

8) Im Jahre 1492 ist Amerika entdecket worden, wie lang ist dieses bis auf 1773? Ant. 281 Jahre.

IV Hauptstück.

Von der Vervielfältigung.

29 §. Vervielfältigen (multipliciren) heist eine Zahl etlichmal zu sich selbst zählen. Z. B. wenn 4 dreimal zu sich selbst gezählet wird: so wird 4 mit 3 vervielfältiget, woraus denn 12 entsteht, welches durch die Zusammenziehung allso geschieht: 4+4+4=12, welche Zahl dreimal gröser ist, als 4. Die Zahl, welche durch die Vervielfältigung entsteht, heist der Inhalt. Die Zahlen, welche man durcheinander vervielfältiget, werden die Vervielfältiger genennet. Will man die Vervielfält-

fältigung durch ein Zeichen ausdrücken: so setzet man zwischen die Vervielfältiger ein Tüpflein, oder ein Schrägkreuz, als: 3.4, 3×4, welches heist: 3 mal 4, oder 4 soll mit 3 vervielfältiget werden.

30 §. Wenn man, anstatt 4 dreimal zu schreiben, die Zahl 3 viermal hinsetzet; so wird man 3+3+3+3=12 bekommen, wie durch 4+4+4. Deßwegen wird einerlei Inhalt herauskommen: man mag 3 mal 4, oder 4 mal 3 sagen u. s. w. Aus der Uebung muß man den Inhalt der einfachen Zahlen wissen, um daraus den Inhalt von allen Zahlen finden zu können. In folgender Tafel sind sie alle abgefasset.

Das Einmaleins.

mal		ist	mal		ist	mal		ist
1	1	1	3	6	18	5	8	40
1	2	2	3	7	21	5	9	45
2	2	4	3	8	24	6	6	36
2	3	6	3	9	27	6	7	42
2	4	8	4	4	16	6	8	48
2	5	10	4	5	20	6	9	54
2	6	12	4	6	24			
2	7	14	4	7	28	7	7	49
2	8	16	4	8	32	7	8	56
2	9	18	4	9	36	7	9	63
3	3	9	5	5	25	8	8	64
3	4	12	5	6	30	8	9	72
3	5	15	5	7	35	9	9	81

Anfängern kann man die Arbeit erleichtern: wenn man die Ziffern umkehret, damit sie desto eher merken, wie die Zahlen um einerlei Grösse zunehmen.

mal	ist		mal	ist		mal	ist	
1	2	2	7	4	28	4	7	28
2	2	4	8	4	32	5	7	35
3	2	6	9	4	36	6	7	42
4	2	8	1	5	5	7	7	49
5	2	10	2	5	10	8	7	56
6	2	12	3	5	15	9	7	63
7	2	14	4	5	20	1	8	8
8	2	16	5	5	25	2	8	16
9	2	18	6	5	30	3	8	24
1	3	3	7	5	35	4	8	32
2	3	6	8	5	40	5	8	40
3	3	9	9	5	45	6	8	48
4	3	12	1	6	6	7	8	56
5	3	15	2	6	12	8	8	64
6	3	18	3	6	18	9	8	72
7	3	21	4	6	24	1	9	9
8	3	24	5	6	30	2	9	18
9	3	27	6	6	36	3	9	27
1	4	4	7	6	42	4	9	36
2	4	8	8	6	48	5	9	45
3	4	12	9	6	54	6	9	54
4	4	16	1	7	7	7	9	63
5	4	20	2	7	14	8	9	72
6	4	24	3	7	21	9	9	81

31 §. Unter diesen Zahlen zeichnet sich die Zahl 9 mit ihrem vielfachen Inhalte besonders damit aus, daß die Summe der Ziffern in jedem Inhalte 9 ausmachet, nämlich in 18 ist $1+8=9$; in 27 ist $2+7=9$ u. s. w. Denn über 9 Einheiten können nicht in einer Stelle stehen (8 §). Hat man nun viermal 9: so kann nur einer davon in der Stelle der Einser stehen, und die drei andern kommen in die Stelle der Zehner. Damit aber diese drei Neuner in die Stelle der Zehner übergehen, müssen sie zuvor Zehner werden. Sie werden Zehner: wenn jeder Neuner nur eins von dem vierten Neuner entlehnet, welcher dadurch auf 6 gebracht wird. Es entstehen allso so viel Zehner, als Einser von dem vierten Neuner entlehnet worden sind. So muß denn die Summe der Einser und der Zehner, die man als blose Einser betrachtet, wieder 9 ausmachen. Alle Zahlen haben eine ähnliche Eigenschaft, die aber nicht so beträchtlich ist.

32 §. **Eine Zahl mit einer einzigen Ziffer vervielfältigen.**

Beide Zahlen werden untereinander geschrieben, und darunter wird ein Strich gezogen. Darauf fängt man bei den Einheiten an, und sezet den Inhalt aus dem Einmaleins unter den Strich. Eben so verfährt man bei den Zehnern, und Hunderten. Die Zehner

werden im Sinne behalten, wie beim Zusammenzählen. Z. B. 3mal 6 ist 18; ich schreibe 8, und behalte 1 im Sinne. 3mal 7 ist 21, und 1 dazu gibt 22; 2 werden im Sinne behalten. 3mal 5 ist 15, und 2 gibt 17, welche Zahl ganz hingeschrieben wird, und alsdann ist der Inhalt 1728, welcher 3 mal grösser ist, als 576.

576
3
1728

33 §. Eine Zahl wird mit 10, 100, 1000 u. s. w. vervielfältiget: wenn man eine, zwo, drei Nullen u. s. w. daran henket. Z. B. 10mal 7 gibt 70, 100 mal 7 gibt 700. Denn 7 soll 10 oder 100mal grösser werden (29 §), 7 wird aber 10 oder 100mal grösser: wenn eine oder zwo Nullen daran gesetzet werden (4 §). Wenn deßwegen ein oder beide Vervielfältiger Nullen bei sich haben: so vervielfältiget man die Ziffern mit einander, und schreibt so viel Nullen dazu, als ein oder beide Vervielfältiger derer haben. Zu diesem Ende kann man die Nullen nebenaus schreiben. Z. B. In dem ersten Muster werden 00 alsbald hingeschrieben; in dem zweiten auch 00; weil jede Zahl eine bei sich hat. Endlich werden in dem dritten auch 00 voraus hingeschrieben.

I	II	III
2400	70	36
6	20	300
14400	1400	10800

34 §. **Eine Zahl mit einer andern von vielen Ziffern vervielfältigen.**

Man vervielfältiget erstlich mit den Einsern, danach mit den Zehnern, Hunderten u. s. w. Diese besondern Inhalte werden zusammengezählet, und geben den Inhalt für alle Zahlen. Z. B. der Inhalt von 1504 und 4 ist 6016. Der Inhalt von 1504 und 7 ist 10528. Weil aber 7 hier ein Zehner und deßwegen 70 ist: so ist der Inhalt davon 105280 (33 §). Da nun 8 in der Stelle der Zehner steht: so kann man die Nulle weglassen. Der Inhalt von 1504 und 5 ist 7520, oder 752000, deren Summe den Inhalt 863296 gibt. Die Ordnung der Ziffern macht sich von sich selbst: wenn man jeden Inhalt unter seinen Vervielfältiger zu schreiben anfängt. Wie man hier sieht: so fängt der Inhalt der Zehner mit 8 an, und steht unter seinem Vervielfältiger 5. u. s. w.

```
  1504
   574
------
  6016
 10528
 7520
------
863296
```

35 §. Hat nun ein Vervielfältiger in der Mitte Nullen: so werden dieselben übergangen, aber der nachfolgende Inhalt wird um so viel Ziffern weiter zur Linken vorgerücket. Z. B.

```
   726        3054
   302        2003
------     -------
  1452        9162
2178       6108
------     -------
219252     6117162
```

36 §. Wenn man diese Ordnung in Acht nimmt: so kann man auch zur rechten Hand anfangen, welches zur Prüfung der gemeinen Art dienen kann. Z. B. Der Inhalt von 726 und 3 ist 2178, wovon 8 unter 3 steht. Der Inhalt von 726 und 2 ist 1452, wovon 2 unter 2 steht. Die Summe der Inhalte ist 219252, wie zuvor.

726
302
2178
1452
219252

37 §. In beiden Vervielfältigungsarten kann man die letzte Zusammenzählung ersparen: wenn man bei dem Inhalte jeder einzeln Ziffer den schon gefundenen Inhalt zählet, und diesen ausstreicht. Z. B. in der erstern Art ist der Inhalt von 7648 und 3 = 22944, welchen man ganz hinsetzet. Darauf fängt man bei 2 an, und spricht: 2mal 8 ist 16, und 4 dazu gibt 20. Ich schreibe 0, und durchstreiche 4; weil 4 schon genommen ist. 2mal 4 ist 8, 2 im Sinne dazu gibt 10, und 9 aus dem ersten Inhalte gibt 19. Ich schreibe 9, und durchstreiche 9 aus dem ersten Inhalte. 2 mal 6 ist 12, und 1 im Sinne gibt 13, und 2 aus dem Inhalte gibt 15. Ich schreibe 5, und durchstreiche 2. 2mal 7 ist 14, und

I	II
7648	7648
23	23
22944	15296
17590	175904

1 im

1 im Sinne ist 15, und 2 aus dem Inhalte gibt 17. Ich durchstreiche 2 aus dem Inhalte, und schreibe 17 hin. Nun geben alle undurchstrichene Ziffern den Hauptinhalt 175904, welcher auch herausgebracht wird: wenn man die Vervielfältigung bei der linken Hand anfängt, wie in dem zweiten Beispiele zu sehen ist.

38 §. Aufgaben zur Uebung.

Die Vervielfältigung wird gebrauchet: wenn man eine Zahl vielmal nehmen muß, welches besonders da geschieht, wo ein grösseres Maas in ein kleineres verwandelt werden soll.

1) Wie viel Kreuzer machen 100 fl.: wenn 1 fl. 60 kr. enthält? Ant. 6000 Kr.

2) Auf einen Gulden gehen 15 Batzen; wie viel gehen auf 60 fl. Ant. 900 Batzen.

3) Wie viel gute Groschen gehen auf 90 Thaler? Ant. 2160.

4) 1 Pfund hat 32 Lothe; wie viel 78 Pf.? Ant. 2496.

5) 1 Klafter hat in der Länge 8 viereckige Schuhe liegen, und 8 von diesen Reihen stehen übereinander; wie viel Viereckschuhe machet es in allem? Ant. 64.

6) Ein Fenster hat 25 Reihen Scheiben, und in jeder Reihe sind 12 Scheiben; wie viel

Scheiben sind am ganzen Fenster? Ant. 300 Scheiben.

7) Ein Haus hat 47 Fenster, jedes Fenster 4 Flügel, und in jedem Flügel sind 9 Scheiben; wie viel sind derer am ganzen Hause? Ant. 1692 Scheiben.

8) Wie viel werden 1692 Scheiben kosten: wenn eine zu 3 Kreuzern angerechnet ist? Ant. 5076 Kreuzer.

9) Die Wache zieht in 12 Gliedern auf, jedes Glied hat 8 Mann; wie stark ist die Wache? Antw. 96 Mann.

10) Es sind 20 Armen, und für jeden werden wochentlich 8 kr. bestimmet; wie viel wird dieses jährlich betragen? Antw. 8320 Kreuzer.

11) Es verzehret einer monatlich 8 Gulden; wie viel thut es in einem Jahre? Antw. 96 fl.

12) Es sind 2 Gärten, und beide mit einer gleich langen Mauer eingefasset. Der erste Garten ist viereckig, und eine Seite hat 125 Schuhe. Der zweite ist länglich, und hat der Länge nach 126, und in der Breite 124 Schuhe. Welcher Garten ist gröser? Antw. Der viereckige: denn dieser hat 15625 Flächenschuhe, und der längliche hat nur 15624.

V Hauptstück.

Von der Theilung.

39 §. Eine Zahl theilen (dividiren), heist einen verlangten Theil von dieser Zahl suchen. Ein verlangter Theil wird gesuchet: wenn man die Zahl des Theilers von der ersten Zahl so vielmal abzieht, als man kann. Eine Zahl muß so vielmal in der andern enthalten sein, als man sie abziehen will. Nach diesem Begriffe heist theilen so viel, als untersuchen, wie vielmal eine Zahl in der andern enthalten sei. Die Zahl, welche getheilet wird, ist die **Theilungszahl**; womit man theilet, der **Theiler**. Der gefundene Theil heist der **Antheil**. Das Theilungszeichen ist ein Querstrich, über welchem die Theilungszahl; darunter aber der Theiler steht. Z. B. $\frac{24}{8}$; oder zween übereinander stehende Punkte, als 24 : 8, wo die Theilungszahl zur Linken steht. Beides heist: 24 soll mit 8 getheilet werden.

40 §. Der Theiler ist die Zahl, welche man von der Theilungszahl abzieht. Der Antheil wird allso anzeigen, wie oft man dieselbige Abziehung anstellen könne. Man kann die Abziehung so oft anstellen, als der Theiler sich findet. Deßwegen ist die Theil-

Theilungszahl, als ein Inhalt anzusehen, der aus dem Theiler, und Antheile besteht. Das Einmaleins muß nun auch hier seine Dienste thun, worin jeder Inhalt eine Theilungszahl vorstellet. Z. B. 36 ist ein Inhalt, wozu 4 der Theiler, und 9 der Antheil ist, oder 9 der Theiler, und 4 der Antheil u. s. w. Wer allso fertig theilen will, der muß das Einmaleins wohl wissen.

41 §. Eine einfache Zahl mit einer einfachen theilen.

1) Die Zahlen werden niedergeschrieben, wie man hier sehen kann, welches aber ganz willkührlich ist.

2) Fraget man, wie oft der Theiler in der Theilungszahl ist. Die Antwort wird aus dem Einmaleins rechter Hand geschrieben.

3) Darauf wird der Antheil mit dem Theiler vervielfältiget, und der Inhalt von der Theilungszahl abgezogen, um zu sehen, ob dieser Inhalt gros genug sei, oder noch etwas übrig bleibe. Z. B. es soll 8 in 4 Theile getheilet werden. Ich frage: wie oft

Theilungszahl	4 Theiler	ist 4 in 8?
8	2 Antheil	Das Einmaleins
8		sagt: 2mal.
0		

Diese

Diese 2 schreibe ich zur Rechten hin, und die Theilung ist fertig. Damit ich aber versichert werde, daß 4 in 8 nur 2mal enthalten sei: so nehme ich den Theiler 4 2mal; und sehe, ob dieser Inhalt so gros sei, als die Theilungszahl, nämlich: 2mal 4 ist 8. Diese 8 wird unter die Theilungszahl geschrieben, wie bei einer jeden Abziehung. 8 von 8 geht auf. 2 ist allso der 4te Theil von 8; oder 4 läßt sich 2mal von 8 abziehen. Soll nun 8 nichts als Einser bedeuten: so wird auch 2 als der 4te Theil davon nur Einser anzeigen. Gilt aber 8 so viel Tausende, Hunderte, oder Zehner: so wird 2 als der 4te Theil, so viel Tausende, Hunderte, oder Zehner geben. Ueberhaupt ist der Antheil mit der Theilungszahl gleichnamig.

Es soll auch 8 mit 3 getheilet werden. Ich spreche: wie oft ist 3 in 8? Das Einmaleins sagt: nur 2mal. Ich schreibe 2 zum Antheile, und die Theilung ist fertig.

Theilungszahl	3 Theiler	
8	2 Antheil	
6		
Ueberschuß 2		

Ich untersuche, ob diese Antwort richtig sei, und spreche: 2mal 3 ist 6. 6 von 8 läßt noch 2 übrig. Der 3te Theil von 8 ist allso 2; oder 3 läßt sich von 8 nur 2mal abziehen, und dann bleiben noch 2 übrig.

Ich kann 3 auch nur 1mal nehmen. Bei dem Abziehen bleibt aber 5 der Ueberschuß, wovon man 3 noch einmal abziehen kann, welches dann ein Zeichen ist, daß ich 3 zu wenig genommen habe. Ich muß allso den Antheil 1 ändern. Dieses beobachtet man bei jeder Theilung, wo der Ueberschuß gröser ist, als der Theiler.

42 §. Eine Zahl von zusammengesetzten Ziffern mit einer Ziffer theilen.

Man theile jede Ziffer besonders mit dem Theiler, und schreibe den Antheil in seine gehörige Ordnung, wie man fraget. Man fängt aber bei der ersten Ziffer zur Linken an. Z. B. 80 soll mit 4 getheilet werden.

Theilungszahl	4 Theiler
80	20 Antheil
8	
00	

Ich nehme 8, und frage: wie oft ist 4 darin? 2 mal. Ich schreibe 2 zum Atheile. Nun ist 2 der 4te Theil von 8. Weil 8 ein Zehner ist: so muß 2 auch ein Zehner sein. So setze ich zu 2 noch eine Nulle, und sie wird 2 Zehner oder zwanzig machen. Zu dieser Nulle kann ich auch durch ein anderes Verfahren gelangen. Ich gehe nämlich in der Theilungszahl von 8 zur 0, und frage:

wie

wie oft ist 4 in 0? Keinmal. Dafür schreibe ich auch 0, und ich bekomme wiederum 20, wie zuvor. Dieses merke ich mir, und werde bei all.n Ziffern fragen, und die Antwort zum Antheile schreiben; sie mag ausfallen, wie sie immer will. Der Antheil wird dadurch unvermerket in seine gehörige Ordnung kommen.

Theilungszahl	4 Theiler
32	8 Antheil
32	
00	

Es soll 32 mit 4 getheilet werden: Wie oft ist 4 in 3? Keinmal; zum Antheile soll 0 kommen. Da aber die Nulle im Anfange zu nichts dienet so läßt man sie hinweg, und schreitet zur folgenden Ziffer, wozu man noch die erste nimmt; weil noch nichts davon abgezogen worden ist. Wie oft ist 4 in 32? 8 mal. 4mal 8 ist 32. 32 von 32 läßt nichts übrig. Hier ist der Antheil 8 Einheiten; weil man 32 Einheiten zusammen genommen hat.

Es soll 78 mit 6 getheilet worden. Wie oft ist 6 in 7? 1mal. Ich schreibe 1 zum

	6 Theiler
7,8,	13 Antheil
6	
1 8	
1 8	
0 0	

Antheile. 1mal 6 ist 6. 6 von 7 läßt 1. Ich gehe zur folgenden Ziffer 8, und schreibe sie zu dem Ueber-

Ueberschusse 1. Bei 8 mache ich einen Beistrich, damit ich nicht dieselbige Zahl noch einmal nehme. Wie oft ist 6 in 18 (denn 8 zu 1 als einem Zehner gibt 18)? 3mal. Ich schreibe 3 zu dem Antheile 1. 6 mal 3 ist 18. 18 von 18 geht auf. So ist denn 6 13mal in 78.

43 §. Die Zergliederung kann hier zur Erläuterung dienen. 78 ist eben so viel, als 70 und 8. Soll nun 78 mit 6 getheilet werden: so muß auch 70 und 8 mit 6 getheilet werden. Wird 70 mit 6 getheilet: so wird 1 Zehner der 6te Theil davon sein; weil 7 Zehner bedeutet. Bei der Abziehung bleibt noch 1 als ein Zehner übrig, woraus man gewiß keine 6 Zehner mehr nehmen kann, wohl aber noch 6 Einser. Nun stelle ich die Frage in Einsern an. Da aber neben den 10 Einsern noch 8 da sind: so sammele ich diese zusammen, und frage: wie oft ist nun 6 in 18 Einsern? Die Antwort ist: 3mal. 6mal 3 ist 18. 18 von 18 läßt nichts mehr übrig. Beide Arten bringen einerlei Antheil.

44 §. Anfänger sollen es sich besonders merken, daß sie aus jeder Stelle eine Antwort haben müssen. Wo die Theilungszahl aber zu klein ist, da wird 0 zum Antheile hingeschrieben. Sie irren weniger: wenn sie vor der Theilung die Anzahl der Ziffern für den

An-

Antheil bestimmen, welche sich immer nach der Anzahl der Ziffern aus der Theilungszahl richten, falls die erste Ziffer für den Theiler gros genug ist. Ist aber die erste Ziffer zu klein: so hat der Antheil eine weniger. Z. B. 3180 soll mit 7 getheilet werden. 3 ist für den Theiler 7 zu klein: so nimmt man noch die folgende 1 dazu, welche zusammen eine Ziffer im Antheile geben. Die beiden folgenden Ziffern geben auch noch zwo für den Antheil, welcher in allem 3 Ziffern bekommen wird. Die Anzahl der Ziffern des Theilers läßt sich gar schön durch die Beistriche bestimmen, welche man in der Theilungszahl machen muß. Z. B. 7 ist in 31?

```
31,8,0 |  7
28     | 454
----
 38
 35
----
  30
  28
----
   2
```

4mal. 7mal 4 ist 28. 28 von 31 läßt 3. 7 in 38? 5mal. 7 mal 5 gibt 35. 35 von 38 bleibt 3. 7 in 30? 4mal. 7 mal 4 ist 28. 28 von 30 läßt noch 2 übrig. Die 3 Ziffern des Antheiles sind 454.

45 §. Zusammengesetzte Ziffern mit zusammengesetzten Ziffern theilen.

Die Ziffern des Theilers werden zusammengenommen, und man fraget damit, wie mit einer Ziffer. Aus der Theilungs-

zahl werden eben so viel Ziffer genommen, als im Theiler sind, oder eine mehr, wenn sie nach der Anzahl der Ziffern des Theilers zu gering wären. 1728 soll mit 12 getheilet werden. Der Theiler hat zwo Ziffern: ich

```
17,2,8, | 12
12      | ---
--      | 144
 52
 48
 --
  48
  48
  --
```

nehme eben so viel aus der Theilungszahl. 12 in 17? 1 mal. Ich schreibe 1 zum Antheile. 1mal 12 ist 12. 12 von 17 läßt 5, dazu kömmt 2. 12 in 52? ist 4mal. 4mal 12 ist 48. 48 von 52 läßt 4, 8 dazu gibt 48. 12 in 48? 4mal. 4mal 12 ist 48, 48 von 48 läßt nichts übrig. Der 12te Theil von 1728 ist nun 144; oder 12 ist 144 mal in 1728.

```
102,8, | 12
 96    | ---
 --    | 85
  68
  60
  --
   8
```

Hier ist 10 für den Theiler 12 zu klein. Ich nehme noch 2 dazu, und frage: 12 in 102? 8mal. Ich schreibe 8 zum Antheile. 8mal 12 ist 96. 96 von 102 läßt 6. 12 in 68? 5mal. 5mal 12 ist 60. 60 von 68 läßt noch 8 übrig. Also ist 12 in 1028, 85mal, und 8 bleibt noch übrig.

46 §. Die Theilungszahl muß den Theiler ein-oder etlichemal enthalten; wenn sie theilbar sein soll. Besteht nun der Theiler aus Zehnern,

und

und Einsern: so müssen die Zehner in den Zehnern, und die Einser in den Einsern eben vielmal stecken. Diese Betrachtung zeiget den Weg an, wie man mit zusammengesetzten Ziffern viel leichter theilen könne. 1728 soll wieder mit 12 getheilet werden. Anstatt zu sagen: 12 in 17? sage ich: 1 von 12 ist in 1 von 17 einmal.

```
 17,2,8, |  12
 12      | ----
 -----   |  144
  52
  48
   48
   48
 -----
```

2 ist in 7 auch einmal: so ist 12 in 17 nur einmal. Ich schreite zu 52. 1 ist in 5? 5mal; 2 ist nicht so vielmal in 2. Also ist auch nicht 12 in 52, 5mal. Ich nehme 1 weniger: und sage: 1 ist in 5? 4mal, und es bleibt noch 1 übrig, welches zu 2 gehöret. 2 ist in diesen 12 auch 4mal. So ist denn 12 in 52 nur 4mal. Jetzt schreibe ich erst meine 4 hin, und sage: 4mal 12 ist 48. 48 von 52 läßt 4. Es ist noch 48 zu theilen. 1 ist in 4 4mal; 2 ist in 8 auch 4mal. Also ist 12 in 48 auch 4mal. 12mal 4 ist 48. 48 von 48 läßt nichts übrig.

Eben dieser Vortheil läßt sich bei allen zusammengesetzten Ziffern anwenden. Z.B. es soll 86715 mit 423 getheilet werden. Die Ziffern 867 sind für 423 gros genug; diese geben also eine Ziffer zur Antwort, und die beiden folgenden jede auch eine. So wird denn der Antheil aus 3 Ziffern bestehen

müssen, welche ich mir schon mit 3 Punkten in der Stelle des Theilers anmerken kann. Darauf fange ich an: 4 in 8? 2mal. 2 in 6? 2mal. 3 in 7? auch 2mal. So ist denn 423 in 867 2mal. Ich schreibe 2 zum Antheile. 2mal 423 ist 846. 846 von 867 läßt 21, und gibt alsdann 211. 4 in 2? keinmal. Ich schreibe 0 zum Antheile, und rücke 5 zu 211, daß 2115 daraus werde. 4 in 21? 5mal, und 1 bleibt übrig, das 11 mit der folgenden 1 ausmachet. 2 in 11? 5mal, und 1 bleibt übrig, das 15 mit der folgenden 5 gibt. 3 in 15? 5mal. So ist denn 423 in 2115 auch 5 mal. Ich schreibe 5 hin. 5mal 423 gibt 2115. 2115 von 2115 läßt nichts übrig.

```
            | 423
867,1,5,    |-----
846         | 205
-----       |
 21 1 5
 21 1 5
-------
 00 0 0
```

47 §. Es ist schon erinnert worden, daß die Vervielfältigung zur Probe der Theilung diene, welche man nach der gänzlichen Theilung von Neuem anfangen kann. Fällt der Inhalt aus dem Theiler und Antheile so gros aus, als die Theilungszahl ist: so ist die Theilung richtig. Denn, wenn der Theiler von der Theilungszahl so vielmal abgezogen wird, als der Antheil Einheiten hat: so muß eben dieser Theiler, wenn er so vielmal wieder zu sich gezählet wird, die Theilungs-

zahl

zahl herstellen (27 §). Der Theiler wird aber so vielmal zu sich gezählet, als der Antheil Einheiten hat; wenn er mit dem Antheile vervielfältiget wird (29 §).

48 §. Es bleibt zuweilen bei der Theilung noch etwas übrig, welches bei einer richtigen Theilung immer kleiner sein muß, als der Theiler. Dieser Ueberschuß wird zu dem Antheile noch gesetzet, worunter aber der Theiler noch geschrieben wird, damit man wisse, daß dieser Ueberschuß auch getheilet werden solle. Z. B. 8 ist 3mal in 29, und

$$\begin{array}{r|l} & 8 \\ \hline 29 & 3\frac{5}{8} \\ \underline{24} & \\ 5 & \end{array}$$

es bleibt noch 5 übrig, welcher Ueberschuß durch $\frac{5}{8}$ bemerket wird, und anzeiget, daß 5 auch noch mit 8 getheilet werden müsse. In der Probe darf aber dieser Ueberschuß nicht vervielfältiget werden; weil 5 nicht getheilet war. Er wird blos zu dem Inhalte gezählet. Z. B. 3mal 8 gibt 24, und 5 dazu macht 29. Sollte aber 29 als so viel Gulden angesehen werden: so kann man den Ueberschuß in eine kleinere Geldart verwandeln, und theilen. Z. B. 5 fl. gibt 300 Kreuzer, wovon $37\frac{4}{8}$ Kreuzer der 8te Theil ist. Der ganze Antheil sieht nun so aus: 3fl. $37\frac{4}{8}$ Kr.

49 §. Wenn der Theiler Nullen hat: so werden diese abgeschnitten, und man theilet

nur mit den Zahlzeichen. In der Theilungszahl werden auch so viel Ziffern abgeschnitten, als man Nullen abgeschnitten hat, welche abgeschnittene Ziffern nicht getheilet, sondern als ein Ueberschuß angehenket werden.

```
              6|0
57,8, | 4 | ―――――
              6 9    24
54                  ――――
――――                 60
 3 8
 3 6
―――――
   2  Ueberschuß.
```

Z. B. in 5784 wird 4 abgeschnitten; weil in 60 eine Nulle abgeschnitten wird. Darauf wird nur 578 mit 6 getheilet. Diese Theilung läßt den Ueberschuß 2 zurück, wozu man noch die abgeschnittene 4 setzet, um den vollständigen Ueberschuß 24 zu bemerken. Der Theiler 6 muß aber auch seine Nulle wiederum annehmen, damit 60 unter 24 geschrieben werden könne. Die Ursache des Abschneidens ist diese: in 60 ist 6 ein Zehner. In den Einsern findt man keinen Zehner. Man kann allso keinen Zehner von den Einsern abziehen.

50 §. Deßwegen ist nichts leichter, als mit 10, 100, 1000 u. s. w. zu theilen. Man schneidet nämlich von der Theilungszahl so viel Ziffern ab, als der Theiler Nullen hat. Z. B. 4604 mit 10 getheilet, gibt $460\frac{4}{10}$. 5304 mit 100 getheilet, gibt $53\frac{4}{100}$. 36000 mit 1000 gibt 36.

51 §.

51 §. Wer im Rechnen schon stark ist der kann die Abziehung im Sinne machen, wodurch die Arbeit sehr abgekürzet wird. Wir wollen ein Muster hersetzen, worin die Vervielfältigung (36 §) angebracht wird. Nämlich 25 ist in 126? 5mal. 2mal 5 ist 10.

	25 Theiler	10 von 12 läßt 2.
12604	$504\frac{4}{25}$	Hier wird das 1 von
12		12 durchstrichen.
		5mal 5 ist 25. 25

von 26 bleibt 1. 2 und 6 werden durchstrichen. 25 ist in 10 keinmal. 25 ist in 104? 4mal. 2mal 4 ist 8. 8 von 10 läßt 2. Hier werden 1 und 0 gestrichen. 4 mal 5 ist 20. 20 von 24 bleibt 4. 2 wird durchstrichen. Also entsteht $504\frac{4}{25}$ für den 25ten Theil von 12604.

Wenn man in dieser Theilung den Theiler unten hinsetzet, und denselben immer fortschiebt: so hat man das so genannte über sich theilen. Beide Arten sind für Anfänger zu schwer.

52 §. Es ist noch ein Vortheil bei der Theilung zu merken, welcher angeführet zu werden verdienet, und darin besteht: Man verkleinert die Theilungszahl und den Theiler durch einen kleinen gemeinschaftlichen Theiler, und arbeitet alsdann mit den verkleinerten Zahlen. Z. B. um 720 mit 18 zu theilen, verwandele ich durch die Theilung mit 2 die Zahl 720 in 360, und den Theiler 18 in 9.

Nun läßt sich 360 mit 9 leicht theilen, und gibt 40, welches auch 18 aus 720 herausbringt. Denn der ganze Theiler ist so oft in der ganzen Theilungszahl, als die Hälfte des Theilers in der Hälfte der Theilungszahl stecket; weil beide Hälften beiderseits ihr Ganzes ausmachen.

53 §. Um diesen Vortheil der Abkürzung zu benutzen, wird es nothwendig sein zu zeigen, welche Zahlen man mit einer andern theilen könne.

1) Ungerade Zahlen sind nur durch ungerade theilbar. 27 durch 3 und 9.

2) Alle Zahlen sind durch 2 theilbar, deren Endziffer gerad ist.

3) Alle Zahlen sind durch 10 theilbar: wenn die Endziffer 0 ist. Denn diese Zahl ist ein Inhalt von 10 (33 §).

4) Eine Zahl ist mit 9 theilbar: wenn die Summe ihrer Ziffern mit 9 theilbar ist. 477 ist mit 9 theilbar; weil $4+7+7=18$ mit 9 theilbar ist. Denn der Unterschied zwischen 9 und 10 ist $=1$. So vielmal nun 10 in 477 ist: eben so vielmal ist 9 und 1 darin. Da die Summe dieser Einser $4+7+7=18$ mit 9 theilbar ist: so ist es auch die Zahl 477 selbst (31 §).

5) Wenn

5) Wenn die Summe der Ziffern mit 3 theilbar ist: so ist auch die Zahl mit 3 theilbar. 777, 477 sind mit 3 theilbar; weil 7+7+7=21, und 4+7+7=18 mit 3 theilbar ist. Denn erstens ist die Zahl mit 3 theilbar, wenn sie mit 9 theilbar ist. Sie ist mit 9 theilbar; wenn die Summe der Ziffern mit 9 theilbar ist. Es wird allso auch die Summe der Ziffern mit 3 theilbar sein. Es kann eine Zahl in so weit mit 9 theilbar sein, daß ein Ueberschuß 3 oder 6 zurückbleibe. In diesem Falle wird die Summe der Ziffern etlichemal 9, und den Ueberschuß 3 oder 6 geben. Jedes ist mit 3 theilbar; so wird es alsdann auch die Zahl selbst sein.

6) Eine Zahl ist mit 6 theilbar: wenn die Summe der Ziffern mit 3 theilbar, und die letzte Ziffer gerad ist. 432 ist mit 6 theilbar. Denn 2 mal 3 ist 6. Ist nun eine Zahl durch 6 theilbar: so muß diese mit 3 und 2 theilbar sein. Ist sie mit 3 theilbar: so muß die Summe der Ziffern mit 3 theilbar sein. Um aber mit 2 theilbar zu sein, muß die Endziffer gerad sein.

7) Eine Zahl ist mit 5 theilbar: wenn die Endziffer 5 oder 0 ist. 765, 540.

8) Eine Zahl ist mit 4 theilbar: so bald die zwo letzten Ziffern, nämlich die Zehner und Einser mit 4 theilbar sind. 516 ist mit

4 theilbar: weil 16 mit 4 theilbar ist. Denn 2 mal 2 ist 4. Was nun mit 4 theilbar ist, muß auch 2mal mit 2 theilbar sein. Soll es 2mal mit 2 theilbar sein: so muß die Endziffer immer gerad sein. Sie kann nicht immer gerad sein: wenn beide Endziffern mit 4 nicht theilbar sind.

9) Eine Zahl ist mit 8 theilbar: wenn die 3 letzten Ziffern davon, nämlich die Hunderte, Zehner und Einser, mit 8 theilbar sind. Z. B. 4128 ist mit 8 theilbar; weil 128 damit theilbar ist. Denn 2mal 2 mal 2 ist 8.

10) Wenn man die letzte Ziffer einer Zahl von der vorletzten, diesen Ueberschuß von der folgenden, diesen wieder von der folgenden abzieht, und der letzte Ueberschuß 0 gibt: so ist diese Zahl mit 11 theilbar. Als 11352 ist mit 11 theilbar: 2 von 5 läßt 3. 3 von 3 gibt 0. 0 von 1 gibt 1. 1 von 1 läßt 0. 9636 ist auch mit 11 theilbar. Denn der Inhalt aus 11 hat diese Eigenschaft, daß die zweite Zahl die Summe der ersten und der zweiten Ziffer, die dritte die Summe der zweiten und dritten von dem Vervielfältiger ist. Als: 876

$$\begin{array}{r} 876 \\ \underline{11} \\ 876 \\ \underline{876} \\ 9636 \end{array}$$

54 §. Aufgaben zur Theilung.

Die Theilung hat Statt: wenn man einen gewissen Theil suchet, oder wenn man Dinge von kleinerer Art in Dinge von grösserer Art verwandelt; oder wenn man ein Ding von dem andern nehmen will.

1) Wie viel Gulden machen 5076 kr.? Antw. 84 fl. 36 kr. Denn ich nehme von 5076 so vielmal 60 kr. hinweg, als ich kann, welches durch die Theilung bewerkstelliget wird.

2) Es werden unter 20 Arme jährlich 160 fl. getheilet; wie viel wird einer bekommen? Antw. 8 fl.

3) Wie viel wird der vorige Antheil wochentlich für einen Armen geben? Antw. 9 und $\frac{12}{52}$ kr.

4) Man hat 340 Gulden jährlich, davon will man Leben; wie viel darf man wochentlich verzehren? Antw. 6 fl. 32 $\frac{16}{52}$ kr.

5) Wie viel Pfunde machen 186 Lothe? Antw. 5 Pf. und es bleiben noch 26 Lothe übrig.

6) 6 Wachslichter kosten 16 Batzen; wie viel denn 1? Antw. 2 $\frac{4}{6}$ Batzen.

7) Einer setzet in die Lotterie, und gewinnt mit einem Kreuzer eine Quaterne, die

die ihm 60000 Kreuzer einbringt; wie viel Gulden machet dieser Gewinn? Antw. 1000 fl.

VI Hauptstück.

Von der Neunerprobe.

55 §. Neben den gewöhnlichen Proben pfleget man auch die Neunerprobe zu machen. Um die Zusammenzählung mit 9 zu prüfen, betrachte man alle Zahlen als blose Einheiten ohne Absicht auf ihre Ordnung. Diese Ziffern zählet man zusammen, und theilet die Summe mit 9. Bei dieser Theilung merket man sich nur den Ueberschuß. Die Ziffern der Summe werden auch zusammengezählet, und ihre Summe mit 9 getheilet. Ist der Ueberschuß dem ersten Ueberschusse gleich: so ist die Summe richtig.

176	
759	
348	5 Ueberschuß.
1283	5 Ueberschuß.

Z. B. 1+7+6 =14; davon läßt 9, 5 übrig. Diese 5+7+5+9=26; davon läßt 9, 8 übrig. 8+3+4+8=23; davon bleibt 5 übrig. Die Ziffern in der Summe machen 14, wovon der Ueberschuß auch 5 ist, welche Uebereinstimmung die Richtigkeit der Arbeit anzeiget. Denn, weil die Summe allen einzeln Zahlen gleich ist: so

so muß in diesen so vielmal 9 sein, als in der Summe; und wenn noch ein Ueberschuß von 9 in diesen ist: so muß er auch in der Summe sein.

56 §. In der Abziehung muß die Summe des Ueberschusses und Abzuges so gros sein, als die verminderte Zahl (27 §). Läßt nun 9 in den erstern denselbigen Ueberschuß, den er in der verminderten Zahl herausbringt: so ist wiederum richtig gearbeitet worden. Z. B. der Abzug 2453 läßt 5 übrig. Der Ueberschuß 1623 läßt 3 übrig; allso beide zusammen 8. Die Zahl 4079 läßt auch 8 übrig.

4076	8	
2453	5	8
1623	3	

57 §. In der Vervielfältigung werden beide Vervielfältiger mit 9 getheilet, und der Ueberschuß bemerket, wovon einer mit dem andern vervielfältiget wird. Dieser Inhalt wird wieder mit 9 getheilet, und der Ueberschuß davon muß so gros sein, als der Ueberschuß aus dem Inhalte beider Vervielfältiger: wenn die Vervielfältigung richtig sein soll. Z. B. der Ueberschuß aus 574 ist 7. Aus 230 ist er 5. 5mal 7 ist 35, wovon 8 der Ueberschuß ist, wie auch aus dem Inhalte 116522.

574	7	
203	5	
1722	35	8
1144		
116522	- -	8

116522. Die Vervielfältigung ist allso richtig. Denn weil beide Vervielfältiger 574, und 203 miteinander vervielfältiget werden: so wird auch der Ueberschuß 7 aus 574 mit dem Ueberschusse 5 aus 203 vervielfältiget; indem diese schon in den Zahlen 574 und 203 stecken. So muß denn der Ueberschuß, welcher aus 7 × 5 = 35 entsteht, eben so gros sein, als der aus 116522.

Wenn der Ueberschuß aus einem Vervielfältiger 0 wäre, und der andere nicht: so müßte der Ueberschuß des Inhaltes auch 0 geben. Z. B. der Ueberschuß von 27 ist 0.

27 | 0
4 | 4
108 | 0

Der von 4 ist 4. Der Ueberschuß vom Inhalte ist auch 0. Denn indem 27 keinen Ueberschuß hat: so ist 27 der Inhalt von 9. Wird nun der Inhalt von 9 mit 4 vervielfältiget: so kann wiederum kein Ueberschuß herauskommen. Oder kürzer: 4 mal 0 ist 0.

58 §. In der Theilung muß der Ueberschuß aus der Theilungszahl so gros sein, als der aus dem Theiler, und Antheile zusammen; weil der Inhalt der beiden letzten Zahlen der Theilungszahl gleich ist (47 §).

4) 11650 | 25 / 466 | 7, 7 | 46 | 4

Z. B. In der Theilungszahl 11650 ist der Neunerüberschuß = 4. Der Ueberschuß vom Theiler 25 ist 7;

und

und der vom Antheile 466 ist auch 7, davon der Inhalt 49 ist, welcher 4 zum Ueberschusse läßt, wie die Theilungszahl.

Wenn der Antheil noch einen Theilungsüberschuß bei sich hat: so wird dieser unvervielfältiget zu dem Neunerüberschusse des Inhaltes aus dem Theiler und Antheile gezählet. Z. B.

6	11652	25	7	49	$4+2=6$
		$366\frac{2}{25}$	7		

Der Inhalt von 7 und 7, als den Ueberschüssen von 25 und 466 gibt 4 zum Neunerüberschusse, welche mit 2 als dem Theilungsüberschusse auch 6 ausmachet, wie der Neunerüberschuß von der Zahl 11652.

59 §. Man kann leicht sehen, daß die Neunerprobe in grosen Zahlen, besonders bei der Vervielfältigung und Theilung von nicht geringem Nutzen sei. Bei der Zusammenziehung und Abziehung ist sie nicht so vortheilhaft, und läßt den andern Probarten den Vorzug. Unterdessen ist es doch möglich, daß bei gleichen Ueberschüssen die Arbeit unrichtig werde. Z. B. anstatt 116522 hätte auch durch einen Irrthum der Inhalt 116252 (57 §) herauskommen können, welcher auch den Ueberschuß 8 gegeben hätte. Allein ein

solcher Fall bleibt blos in der Möglichkeit; und es müßte wunderlich hergehen, wenn alle Ziffern, aber in einer andern Ordnung, herauskommen sollten. Man kann aber auch diesen Mangel, sobald es sonst nothwendig wäre, ersetzen: wenn man neben dem Ueberschusse bemerket, wieviel mal 9 darin enthalten ist, welches doch schon zu umständlich ist.

VII Hauptstück.

Die Rechnungsarten in benannten Zahlen.

60 §. Die Zahlen können verschiedenen Dingen zukommen, in welcher Absicht sie auch verschiedene Namen erhalten. 4 kann so wohl von Gulden, als von Kreuzern u. s. w. gesagt werden. Solche Zahlen, welche verschiedene Namen haben, und unter einem Namen betrachtet werden können, heisen benannte Zahlen.

61 §. Benannte Zahlen zusammenzählen.

Man zählet jede Art besonders zusammen. Wenn die Summe von einer kleinern Art so gros ist, als die Einheit von der grösern: so werden diese davon genommen, und zu den andern getragen.

Z. B.

fl.	kr.
4 - -	18
2 - -	56
7 - -	14

Ruthen	Schuh
7 - -	8
3 - -	9
11 --	5

Z. B. die Summe der Kreuzer ist 74, worin noch ein Gulden stecket, welcher zu den Gulden gerechnet wird. Darum ist die Summe 7 fl. 14 kr. Bei den Schuhen ist diese Uebertragung auch geschehen.

62 §. Gleichartige Zahlen werden von gleichartigen abgezogen. Bei dem Borgen merket man, daß die entlehnte Einheit nicht 10, sondern so viel ist, als auf die kleinere Art gehöret. Um nun 56 von 14 abzuziehen,

fl.	kr.
7 -	14
2 -	56
4 -	18

entlehnet man 1 von 7 fl.; dieser 1 Gulden gilt nun 60 Kreuzer, und mit 14 gibt er 74, wovon nun der Ueberschuß 18 ist. Bei 7 muß man sich merken, daß diese Zahl um 1 verkleinert worden ist.

Pf.	Lothe	Quint.
9 -	= -	1
3 -	8 -	3
5 -	23 -	2

Von 9 borget man 1 Pfund, welches 32 Lothe ausmachet. 32 Lothe geben 1 ab, um Quintchen daraus zu machen. Alsdann wird 3 von 5; 8 von 31, und 3 von 8 abgezogen.

63 §. Benannte Zahlen vervielfältigen.

Benannte Zahlen werden vervielfäliget, wie die unbenannten. Z. B. 24 wird erst mit 4 vervielfältiget, und es kommen 96 Kreuzer heraus. Darauf wird 4 auch mit 4 vervielfältiget; und es entstehen 16 fl. Nun ist der Inhalt 16 fl. 96 Kreuzer. Da man aber die Kreuzer in Gulden zu bezahlen pfleget: so werden diese 96 kr. in Gulden verwandelt, welche noch zu den andern Gulden gezählet werden; alsdann werden für den Inhalt 17 fl. 36 kr. kommen.

fl.		kr.
4	-	24
		4
17	-	36

Wenn der untere Vervielfältiger auch aus benannten Zahlen besteht: so nimmt man eine Zahl um die andere, und vervielfältiget damit. Z. B. erstlich vervielfältiget man 4 fl. 24 kr. mit 9. Darauf vervielfältiget man auch 4 fl. 24 kr. mit 6. Die besondern Inhalte zählet man zusammen: so wird 66 für den ganzen Inhalt entstehen.

fl.		kr.
4	-	24
6	-	9
66	.	-

64 §. Bei der Vervielfältigung ist wohl zu merken, daß der Inhalt den Namen der Zahlen von einem Vervielfältiger behalte: wie man hier gesehen hat, daß 4 fl. mit 9 kr. vervielfältiget worden, und 36 Gulden her-

vor-

vorgebracht hat. Denn 4 Gulden mit 9 Kreuzern vervielfältigen heist anders nichts, als 4 Gulden so vielmal nehmen, als Kreuzer da sind. Es sind 9 Kreuzer da: so nimmt man dann 4 Gulden 9 mal, welches anders nichts geben kann, als eine Summe von Gulden. Die Namen thun allso nichts zu der Vervielfältigung. Wie man vortheilhafter vervielfältigen könne, soll bei den Brüchen gelehret werden.

65 §. Die Theilung der benannten Zahlen ist von der gewöhnlichen nicht verschieden. So viel verschiedene Zahlen der Theiler hat; so vielmal muß man von neuem theilen.

66 §. Alle Rechnungsarten kann man nach NB.
Art der ungenannten Zahlen machen: wenn man alle benannte Zahlen auf die kleinste Art bringt. Z. B. um 4fl. 24kr. mit 4 zu vervielfältigen kann man 4fl. erst zu Kreuzern machen; sie zu 24 zählen, und alsdann vervielfältigen. Hernach machet man den Inhalt wiederum zu Gulden. In der Vervielfältigung wird der untere Vervielfältiger unverändert gelassen; weil da der Namen in die Rechnung keinen Einfluß hat.

67 §. **Aufgaben zu benannten Zahlen.**

1) Von einer Waare werden 6 ℔ 4 Lothe; 3 ℔ 24 L. 10 ℔ 18 L. erkaufet; wie viel machet es zusammen? Ant. 20 ℔. 14 Lothe.

 2) Karl

2) Karl ist den 7ten März 1748 geboren; wie alt ist er den 16ten August 1773? Ant. 25 Jahre, 5 Monate, und 10 Tage.

3) Zween haben miteinander gearbeitet Der erste 20 Wochen und 6 Tage; der andere 32 Wochen, und 4 Tage. Alle Tage verdienen sie 18 Kreuzer; wie viel machet es für beide? Ant. Sie haben zusammen 53 Wochen und 3 Tage grarbeitet, welches in allem 112 fl. 12 kr. beträgt.

4) Es sollen 6 fl. 28 kr. 3 Pf. unter 8 Personen vertheilet werden. Wie viel beträgt es für jeden? Ant. 48 kr. $2\frac{3}{8}$ Pf.

3) Das Pfund Hecht kostet 12 kr. 1 Pf. Wie viel werden denn 8 ℔. kosten? Antw. 1 fl. 38 kr.

VIII Hauptstück.
Von den Brüchen.

68 §. Durch einen Bruch versteht man einen oder etliche Theile eines Ganzen, oder einer Einheit. Z. B. man zerlege einen Gulden in drei Theile: so ist ein Theil davon ein Bruch. Man nehme zween Theile davon: so hat man wieder einen Bruch. Die Theile eines Ganzen werden durch die Theilung gefunden (39 §). Man kann allso einen Bruch mit dem Theilungszeichen ausdrücken.

Unter

Unter dem Striche steht die Zahl, welche anzeiget, in was für Theile das Ganze getheilet worden ist, welche deßwegen der Nenner heist, und alle Theile des Ganzen anzeiget. Ueber dem Striche steht die Anzahl dieser Theile, und wird der Zähler genennet. Z. B. $\frac{3}{4}$, hier ist 3 der Zähler und 4 der Nenner, welches so viel bedeutet, als: ein Ganzes soll in 4 Theile getheilet werden, und von diesen vier Theilen soll man 3 nehmen. Es wird ausgesprochen: 3 vierte Theile: oder 3 **Viertel**, welches für alle Brüche gilt, indem man die Zahl des Nenners mit **tel** verbindet, als: $\frac{1}{2}$ heist ein **Zweitel**, oder auch ein **Halbes**. $\frac{4}{5}$, 4 Fünftel u. s. w. Es wird deßwegen 3 Viertel mit $\frac{3}{4}$ kürzer ausgedrücket, woraus denn der Grund erfolget, warum man Brüche als ganze Zahlen brauchen kann.

69 §. Wenn man ein Ganzes in 4 Theile zerlegen und davon 3 Theile nehmen soll: so bekömmt man eben so viel, als wenn man den vierten Theil von 3 Ganzen nimmt. Denn ein vierter Theil von 3 Ganzen enthält auch einen vierten Theil von jedem Ganzen. Deßwegen bedeutet $\frac{3}{4}$ auch, daß man von 3 den vierten Theil finden soll. Daraus folget, daß der Ueberschuß in einer Theilung ein Bruch sein müsse; und daß ein Bruch eine Theilung anzeige.

70 §. Der Nenner eines Bruches gibt das Ganze, oder alle Theile des Ganzen (68 §). Wenn nun der Zähler kleiner ist als der Nenner: so hat man das Ganze, oder alle Theile nicht, sondern nur einen oder den andern Theil. Ein solcher Bruch ist ein **wahrer, ächter und eigentlicher** Bruch; als: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$ u. s. w. Ist aber der Zähler dem Nenner gleich, oder gröser als der Nenner: so hat man alle Theile des Ganzen, oder mehr; dieser Bruch heist ein **unächter, uneigentlicher** Bruch, oder **Afterbruch.** Z. B. $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{1}$ u. s. w. Eine ganze Zahl mit einem Bruche heist eine **gemischte Zahl**, als: $4\frac{2}{3}$.

71 §. **Eine ganze Zahl zu einem beliebigen Bruche machen.**

Man vervielfältiget die ganze Zahl mit derjenigen Zahl, welche der Nenner sein soll. Unter den Inhalt schreibt man den gegebenen Nenner. Z. B. 3 soll zu Vierteln gemacht werden. Da hier der Nenner 4 gegeben wird: so wird 3 mit 4 vervielfältiget, welches 12 gibt. Unter 12 wird 4 geschrieben: so ist $\frac{12}{4}$ der verlangte Bruch. Denn ein Ganzes hat 4 Viertel (68 §). Also müssen 3 Ganze auch 3mal 4, nämlich $\frac{12}{4}$ geben. Die Richtigkeit wird geprüfet: wenn 4 durch die Theilung wiederum 3 herausbringt.

72 §. Eine gemischte Zahl zu einem Afterbruche machen.

Die ganze Zahl wird mit dem Nenner des angehenkten Bruches vervielfältiget. Zu dem Inhalte wird der Zähler gezählet, und diese Summe gibt den Zähler zum Afterbruche, und der Nenner des angehenkten Bruches ist der Nenner dazu. Z. B. $5\frac{3}{4}$ macht $\frac{23}{4}$. Denn 5 gibt $\frac{20}{4}$ (71 §), und $\frac{3}{4}$ dazu gibt $\frac{23}{4}$, welches eben so viel ist, als $5\frac{3}{4}$; weil dieses herausgebracht wird: wenn 23 mit 4 getheilet wird.

73 §. Zwo benannte Zahlen in eine vermischte Zahl verwandeln.

Man suchet, wie viel von der geringern Art auf die höhere gehe. Diese Zahl wird der Nenner, und die Zahl von der geringern Art wird der Zähler. Z. B. 7 Gulden 24 Kreuzer sind eben so viel, als $7\frac{24}{60}$ Gulden. Denn Kreuzer sind Theile eines Gulden. 60 Kreuzer sind alle Theile eines Gulden. Alle Theile eines Ganzen sind aber der Nenner eines Bruches (68 §). 24 ist allso der Zähler, und 60 der Nenner. Deßgleichen sind 3 Lothe = $\frac{3}{32}$ Pfund. 7 gute Groschen machen $\frac{7}{24}$ Thaler. 10 Zolle geben $\frac{10}{12}$ Schuh u. s. w.

74 §. Den Werth eines Bruches in benannten Theilen finden.

Man vervielfältige den Zähler mit den bestimmten Theilen, und theile diesen Inhalt mit dem Nenner. Z. B. wie viel Kreuzer machen $\frac{3}{4}$ Gulden. 3 wird mit 60 vervielfältiget; weil 60 Kreuzer auf einen Gulden gehen: so ist $\frac{3}{4}$ fl. eben so viel, als $\frac{180}{4}$ in Kreuzern, welches durch die Theilung 45 Kreuzer macht. Denn $\frac{3}{4}$ Gulden bedeutet, daß man von 3 Gulden den vierten Theil nehmen soll (69 §). Verwandelt man aber die Gulden in Kreuzer: so muß 60, so viel nämlich Kreuzer auf einen Gulden gehen, 3mal genommen, das ist, mit 3 vervielfältiget werden, welcher neue Zähler 180 sich alsdann mit dem Nenner theilen läßt, und 45 Kreuzer hervorbringt.

75 §. Wenn man den Zähler eines Bruches mit einer Zahl vervielfältiget: so wird der Bruch so vielmal gröser, als diese Zahl Einheiten hat. Z. B. vervielfältiget in $\frac{3}{4}$ den Zähler 3 mit 2: so ist $\frac{6}{4}$ 2mal gröser als $\frac{3}{4}$. Denn es bleiben dieselbigen Theile, nämlich Viertel, und ihre Anzahl wird nur verändert.

Hingegen wird ein Bruch so vielmal kleiner, wenn sein Nenner ohne Zähler vervielfältiget wird. Z. B. vervielfältiget in $\frac{3}{4}$ den Nenner

4 mit

4 mit 2: so wird $\frac{3}{8}$ 2mal kleiner als $\frac{3}{4}$. Weil dieselbige Anzahl von Theilen bleibt; ihre Gröse aber um die Hälfte verschieden ist.

76 §. Wenn Zähler, und Nenner mit derselbigen Zahl vervielfältiget werden: so ist der neue Bruch so gros, als der erstere, und hat damit denselbigen Werth. Z. B. $\frac{3}{4}$ wird mit 2 vervielfältiget, und gibt $\frac{6}{8}$ welcher Bruch so gros ist, als $\frac{3}{4}$; weil $\frac{3}{4}$ durch die Vervielfältigung des Zählers mit 2, 2mal gröser geworden ist (75 §). Hingegen ist er durch die Vervielfältigung des Nenners mit 2, auch 2mal kleiner geworden. Dieses läßt sich auch begreifen; da der vierte Theil von 3 Gulden eben so gros ist, als der 8te Theil von 6 Gulden.

77 §. Ueberhaupt bleibt der Werth eines Bruches bei jeder Veränderung der Zahlen: wenn der Zähler um so viel mal vergrösert, oder verkleinert wird, als der Nenner vergrösert oder verkleinert worden ist, welches immer geschieht, indem die Veränderungen im Zähler und Nenner durch dieselbige Zahl vorgenommen werden. Deßwegen muß auch der Werth eines Bruches bleiben: wenn Zähler und Nenner mit derselbigen Zahl getheilet werden, welches einer von den vornehmsten Vortheilen in der ganzen Rechen-

kunst ist: indem kleinere Zahlen sich eher übersehen lassen, als grösere.

78 §. Einen Bruch kleiner machen, ohne seinen Werth zu verändern.

Man theilet Zähler und Nenner mit einer beliebigen Zahl so oft, als man kann. Z. B. $\frac{216}{288}$ wird durch 3 auf $\frac{72}{96}$ gebracht. $\frac{72}{96}$ läßt sich auch noch durch 3 auf $\frac{24}{32}$ bringen. $\frac{24}{32}$ wird durch 4 in $\frac{6}{8}$ verwandelt. $\frac{6}{8}$ wird durch 2 zu $\frac{3}{4}$ gemacht. Allso ist $\frac{216}{288}$ in seinen kleinsten Zahlen $\frac{3}{4}$.

79 §. Bei Verkleinerung der Brüche kömmt es darauf an, daß man den Theiler dazu alsbald finde, welches schon im 53 § gelehret worden ist.

80 §. Will man die Zahl finden, welche durch eine einzige Theilung den kleinsten Bruch herausbringen soll: so verfährt man folgender Gestalt. Man theilet den Nenner mit dem Zähler; den Zähler mit dem, was übrig bleibt; dieses mit seinem Ueberschusse, und so immerfort den letzten Theiler mit dem letzten Ueberschusse, bis ein Theiler gefunden wird, der nichts übrig läßt; dieser wird der gesuchte Theiler für den Bruch sein. Z. B. wenn in dem Bruche $\frac{216}{288}$ der Nenner 288 mit dem Zähler 216 getheilet wird: so bleibt 72 übrig. Der Theiler 216 wird mit dem Ueberschusse 72 getheilet, und es bleibt nichts übrig. Dieser

letzte

letzte Theiler 72 ist allso ein reiner Theiler für $\frac{216}{288}$. Wenn man durch dieses Theilen auf 1 kömmt: so läßt der Bruch sich nicht verkleinern. Die Ursache dieses Verfahrens ist diese: 216 ein- oder etlichemal genommen, ist mit dem Ueberschusse 72 so gros, als der Nenner 288 (48 §). Läßt sich nun 216 mit 72 theilen: so läßt sich auch 288 damit theilen.

81 §. Verschiedene Brüche unter einerlei Benennung bringen.

Vervielfältiget Zähler und Nenner jedes Bruches mit allen Nennern der übrigen Brüche: so werden alle Brüche einerlei Nenner oder Benennung bekommen. Z. B.

$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 \;\; \frac{12}{24}$
$\frac{2}{3} \times 2 \times 4 \;\; \frac{16}{24}$
$\frac{3}{4} \times 2 \times 3 \;\; \frac{18}{24}$

$\frac{1}{2}$ wird mit 3 und 4 als den übrigen Nennern vervielfältiget: 3mal 4 ist 12. 1mal 12 gibt 12 zum Zähler. 2mal 12 ist 24 zum Nenner. $\frac{1}{2}$ ist nun in $\frac{12}{24}$ verwandelt worden.

2) $\frac{2}{3}$ vervielfältiget mit 2 und 4, als den übrigen Nennern. 2mal 4 ist 8. 2mal 8 gibt 16 für den Zähler. 2mal 4 ist 8. 3mal 8 ist 24 für den Nenner: $\frac{2}{3}$ ist nun $\frac{16}{24}$.

3) $\frac{3}{4}$ vervielfältiget mit 2 und 3 als den Nennern. 2mal 3 ist 6. 3mal 6 gibt 18 für den Zähler, und 4mal 6 machet 24 für

den Nenner. $\frac{3}{4}$ ist jetzt $\frac{18}{24}$. Nun haben die neuen Brüche einerlei oder einen allgemeinen Nenner, und sind den alten Brüchen gleich; weil Zähler und Nenner mit denselbigen Zahlen vervielfältiget worden sind (76 §). Durch die Theilung werden die ersten Brüche wiederum hergestellet.

82 §. Man kann auch Brüche folgender Gestalt auf einerlei Nenner bringen. Erstlich werden alle Nenner miteinander vervielfältiget, welcher Inhalt den allgemeinen Nenner abgibt. Z. B. der Inhalt 2. 3. 4 = 24 ist der allgemeine Nenner, und wird oben angeschrieben, und mit einem Striche von den andern Zahlen abgesondert. 24 wird nun mit dem Nenner 2 getheilet, und der Antheil 12 neben $\frac{1}{2}$ geschrieben. Darauf wird diese 12 mit dem Zähler 1 vervielfältiget, und der Inhalt 12 ist der Zähler des neuen Bruches, dessen Nenner 24 ist.

$$\begin{array}{ll} & \underline{\;24\;} \\ \frac{1}{2}\times 12, & 12 \\ \frac{2}{3}\times 8, & 16 \\ \frac{3}{4}\times 6, & 18 \end{array}$$

2) Eben so verfährt man mit dem zweiten Bruche. 24 wird mit dem Nenner 3 getheilet, und der Antheil 6 neben den Bruch geschrieben. 8 wird mit dem Zähler 2 vervielfältiget, und der Inhalt 16 ist der Zähler des zweiten Bruches für den Nenner 24.

3)

3) Endlich wird 24 mit dem Nenner 4 getheilet. Der Antheil 6 wird mit dem Zähler 3 vervielfältiget. Der Inhalt 18 ist der Zähler des dritten Bruches für den Nenner 24. Dieses Verfahren hat seinen Grund darin, daß Zähler und Nenner mit einerlei Zahl vervielfältiget werden, welches dem Werthe eines Bruches nicht schadet (78 §). Es wird aber darum der Inhalt aller Nenner mit jedem Nenner ins besondere getheilet, damit man finden möge, womit derselbige Nenner vervielfältiget worden. Z. B. wird 24 mit 2 getheilet: so findet sich, daß der Nenner 2 mit 12 vervielfältiget worden (40 §), womit denn auch der Zähler vervielfältiget werden muß, um die Gleichheit zu erhalten. Eben dieses gilt für alle andere Nenner.

83 §. Diese letzte Art hat noch diesen Vortheil, daß man einen kleinen allgemeinen Nenner findt: wenn man diejenigen Nenner durchstreichet, die in andern aufgehen, und nur mit den undurchstrichenen vervielfältiget. Man theilet aber mit allen Nennern. Z. B.

12
$\frac{1}{2} \times 6,\ 6$
$\frac{2}{3} \times 4,\ 8$
$\frac{1}{4} \times 3,\ 9$

der Nenner 2 geht in 4 auf; er wird deßwegen durchstrichen, zum Zeichen, daß er zur Vervielfältigung nicht genommen wird. Nun wird der Inhalt aus 3 und 4 gemachet, welcher hernach mit

allen Nennern getheilet wird. Im Uebrigen verfährt man, wie oben. Indem man den Nenner 2 von der Vervielfältigung ausschließt: wird der allgemeine Nenner 2mal kleiner, und deßwegen auch die neuen Zähler. Darum sind diese Brüche hier auch um die Hälfte kleiner, als die im vorigen Abschnitte.

84 §. Man muß nicht glauben, als wären keine andere Wege, einen allgemeinen Nenner zu finden. Neben den beschriebenen gibt es noch mehrere. Denn ungleiche Nenner werden durch die Vervielfältigung gleich gemachet. Findt man nun eine Zahl, welche mit jedem Nenner theilbar ist: so kann diese Zahl für den allgemeinen Nenner gelten. Z. B. die Zahlen 36, 48, 60 u. s. w. sind mit den Nennern von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ theilbar; es kann allso jede ein allgemeiner Nenner sein, und nach 72 § behandelt werden. Die im vorigen § gemeldeten Rechnungsarten sind aber die leichtesten; weil sie den allgemeinen Nenner, und zugleich eine Zahl hervorbringen, die mit allen Nennern theilbar ist, indem sie aus allen Nennern entstanden ist. Es gibt aber doch zuweilen Fälle, wo der allgemeine Nenner noch leichter gefunden wird. Z. B. $\frac{5}{6}$ und $\frac{24}{36}$, wo der letzte durch 6 zu $\frac{4}{6}$ wird u. s. w.

85 §. Brüche zusammenzählen.

Wenn die Brüche einerlei Nenner haben: so zählet man ihre Zähler zusammen, und schreibt einen Nenner darunter. Sind die Nenner nicht einerlei: so muß man sie zuvor dazu machen. Z. B. $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ gibt $\frac{4}{4} = 1$. $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ gibt $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$. Hier wird $\frac{1}{2}$ in $\frac{2}{4}$ verwandelt. Wenn viele verschiedene Brüche in eine Summe gebracht werden: so ist das Verfahren im 83 § vortheilhaft; weil die Zähler schon übereinander stehen, wie man hier sieht. Alle Brüche müssen einerlei Nenner haben; weil man die Zähler nicht zusammenzählen kann, welche von verschiedener Art sind, wie in den ganzen Zahlen. Es werden aber die Nenner nicht zusammengezählet; indem sie nur den Namen der Theile bedeuten (68 §).

$$\begin{array}{l} \quad\;\; 12 \\ \frac{1}{2} \times 6,\ 6 \\ \frac{3}{4} \times 3,\ 9 \\ \frac{5}{12} \times 1,\ 5 \\ \hline \quad \frac{20}{12} = 1\frac{2}{3} \end{array}$$

86 §. Brüche von Brüchen abziehen.

Wenn die Nenner gleich sind: wird ein Zähler von dem andern abgezogen, und der allgemeine Nenner ist der Nenner des Ueberschusses. Z. B. $\frac{1}{4}$ von $\frac{3}{4}$ gibt $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{2}$ gibt $\frac{1}{6}$; denn $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, und $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$. Nun ist $\frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$.

87 §. Einen Bruch von einer ganzen Zahl abziehen.

Die ganze Zahl wird zu einem Bruche gemachet, der einerlei Nenner mit dem Abzuge bekomme (71 §): und alsdann zieht man ab. Z. B. es soll $\frac{2}{3}$ von 3 abgezogen werden. Man verwandele 3 in $\frac{9}{3}$: so gibt $\frac{9}{3} - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$ oder $2\frac{1}{3}$. Weil aber ein Bruch immer kleiner ist, als 1 Ganzes: so nimmt man von 3 nur 1, und machet daraus einen Bruch. Z.B. anstatt 3 setzet $2\frac{3}{3}$, nun ziehet $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{3}$: so wird $2\frac{1}{3}$ bleiben.

88 §. Vermischte Zahlen von vermischten Zahlen abziehen.

Man machet aus den vermischten Zahlen Afterbrüche, und zieht alsdann ab. Oder man zieht das Ganze vom Ganzen, und den Bruch von dem Bruche. Z. B. $4\frac{3}{4} - 3\frac{1}{4} = 1\frac{1}{2}$. Man spreche: 3 von 4 läßt 1, und $\frac{1}{4}$ von $\frac{3}{4}$ bleibt $\frac{2}{4}$ oder $\frac{1}{2}$. Nun ist der ganze Ueberschuß $1\frac{1}{2}$. Oder $4\frac{3}{4} - 3\frac{1}{4}$ wird in $\frac{19}{4} - \frac{13}{4}$ verwandelt (72 §), wovon der Ueberschuß $\frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$ gibt.

Sollte der Abzugsbruch zu gros sein: so müßte man 1 zum Bruche machen, und zu dem andern zählen, hernach abziehen. Z. B. in $8\frac{1}{4} - 2\frac{3}{4}$ schreibet $7\frac{5}{4}$ anstatt $8\frac{1}{4}$, indem 1 von 8 genommen, und zu $\frac{4}{4}$ gemachet wird.

Nun

Nun läßt 2 von 7, 5; und $\frac{3}{4}$ von $\frac{5}{4} = \frac{1}{2}$. Der ganze Ueberschuß ist nun $5\frac{1}{2}$.

89 §. Einen Bruch mit einer ganzen Zahl vervielfältigen.

Man vervielfältiget nur den Zähler, und läßt dem Inhalte den Nenner. Z. B. $\frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}$, sage 4mal $\frac{2}{3}$ gibt $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$. Denn $\frac{2}{3}$ wird dadurch 4mal so gros (75 §); folglich 4mal genommen, oder mit 4 vervielfältiget.

Ist der Zähler des Bruches = 1: so kann man die ganze Zahl mit dem Nenner alsbald theilen. Z. B. 12mal $\frac{1}{3}$ gibt 4, nämlich 12 wird mit 4 getheilet; weil 12mal $\frac{1}{3} = \frac{12}{3}$, welches in Ganze verwandelt wird, und 4 ausmachet.

90 §. 12mal $\frac{1}{3}$, und $\frac{1}{3}$ mal 12 geben eben denselben Inhalt (30 §). Es heist allso eine ganze Zahl $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$mal u. s. w. nehmen anders nichts, als die ganze Zahl mit 2, 3, 4 u. s. w. theilen,

91 §. Brüche mit Brüchen vervielfältigen.

Es wird Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner vervielfältiget. Z. B. $\frac{2}{3}$ mal $\frac{3}{4}$ gibt $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, nämlich 2mal 3 gibt 6; 3mal 4 gibt 12. Denn $\frac{3}{4}$ soll mit dem dritten Theile von 2 vervielfältiget werden; weil $\frac{2}{3}$ den dritten Theil von 2 bedeutet (69 §).

Wird aber in $\frac{3}{4}$ der Zähler mit 2 vervielfältiget: so ist der Inhalt $\frac{6}{4}$ 3mal gröser, als er sein soll; da er nicht mit der ganzen Zahl 2, sondern mit dem dritten Theile von 2 vervielfältiget werden muß. Der Inhalt $\frac{6}{4}$ muß allso 3mal kleiner werden, welches aber erfolget: wenn in $\frac{6}{4}$ der Nenner mit dem Nenner 3 vervielfältiget wird.

92 §. Vermischte Zahlen vervielfältigen.

Die vermischten Zahlen werden in einen Afterbruch verwandelt, und alsdann vervielfältiget. Z. B. $2\frac{1}{2} \times 3$ gibt $7\frac{1}{2}$; weil $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, und $\frac{5}{2} \times 3 = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$. Man kann aber auch die ganze Zahl, und den Bruch besonders vervielfältigen, welches dann vortheilhaft ist, wann der Zähler durch die Vervielfältigung theilbar wird. Z. B. $2\frac{2}{3} \times 6 = 16$, nämlich 6 mal $\frac{2}{3}$ gibt $\frac{12}{3} = 4$, und 6 mal $2 = 12$, zusammen 16.

93 §. Durch die Vervielfältigung mit ächten Brüchen entsteht ein Inhalt, der kleiner ist, als das Vervielfältigte. Z. B. $3 \times \frac{3}{4}$ gibt zum Inhalte $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$, welcher kleiner ist, als 3. Wie denn $\frac{2}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$, das kleiner ist, als $\frac{2}{4}$ oder $\frac{4}{8}$. Denn in einem ächten Bruche ist der Nenner immer gröser, als der Zähler (70 §). Darum

muß

muß der Inhalt der Nenner immer gröser werden, als der Inhalt der Zähler. Im Gegentheile ist der Inhalt von einem unächten Bruche gröser. Z. B. $3 \times \frac{4}{3}$ gibt $\frac{12}{3} = 4$. Deßwegen ist die Vervielfältigung mit Brüchen bei ganzen Zahlen eine wahre Verkleinerung; weil die Stücke von einem Dinge desto kleiner werden, je mehr man aus denselbigen machet.

94 §. Eine ganze Zahl mit Brüchen theilen.

Die ganze Zahl wird mit dem Nenner vervielfältiget, und mit dem Zähler getheilet. Z. B. um 4 mit $\frac{2}{3}$ zu theilen, wird 4 mit dem Nenner 3 vervielfältiget, und es wird 12 daraus. 12 wird mit dem Zähler 2 getheilet, und gibt 6. Denn durch die Theilung wird gesuchet, wie oft man eine Zahl von der andern abziehen könne (39 §). Verlanget man aber zu wissen, wie oft ein Bruch, hier $\frac{2}{3}$ von 4 abgezogen werden könne: so muß man zuvor 4 zu Dritteln machen (85 §), welches geschieht, wenn 4 mit dem Nenner 3 vervielfältiget wird (71 §), wodurch man $\frac{12}{3}$ an statt 4 erhält. Nun zieht man den Zähler 2 von dem Zähler 12 sovielmal ab, als man kann, d. i. 12 wird mit dem Zähler 2 getheilet.

95 §. Einen Bruch mit einer ganzen Zahl theilen.

Der Nenner des Bruches wird mit der ganzen Zahl vervielfältiget, und dieser Bruch wird das Verlangte sein. Z. B. $\frac{2}{3}$: 4 gibt $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Denn $\frac{2}{3}$ soll 4 mal kleiner gemachet werden (39 §). Dieses thut man aber: wenn nur der Nenner mit 4 vervielfältiget wird (75 §).

96 §. Brüche mit Brüchen theilen.

Man bringt die Brüche unter einerlei Benennung, und theilet mit dem Zähler. Z. B. $\frac{6}{7}$: $\frac{3}{7}$ gibt 2. $\frac{3}{4}$: $\frac{1}{2}$, setzet: $\frac{6}{8}$: $\frac{4}{8}$ gibt $\frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$. Denn man will wissen, wie oft ein Bruch von dem andern abgezogen werden könne (31 §.). Um aber abziehen zu können, müssen gleichartige Brüche da sein. Alsdann wird der Zähler so oft abgezogen als man kann, oder man theilet mit diesem Zähler. Wenn man bei ungleichartigen Brüchen den Theiler umkehret, daß der Nenner zum Zähler werde, und alsdann vervielfältiget: so hat man auch getheilet. Z. B. an statt $\frac{3}{4}$: $\frac{1}{2}$ setze $\frac{3}{4} \times \frac{2}{1}$, und es entsteht $\frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$, wie zuvor. Denn durch die Versetzung und Vervielfältigung wird einerlei Nenner gesuchet, und zugleich getheilet, wie man leicht sehen kann. Denn damit $\frac{3}{4}$ mit $\frac{1}{2}$ einerlei Nenner bekomme, muß 3 mit dem

 Nenner

Nenner 2 vervielfältiget werden. Deßgleichen muß 1 in $\frac{1}{2}$ mit dem Nenner 4 vervielfältiget werden. Beides geschieht: wenn der Theiler umgekehret, und alsdann vervielfältiget wird.

97 §. Die vermischten Zahlen werden zuvor zu einem Bruche gemachet, ehe man die Theilung vornimmt. Z. B. anstatt $2\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ setze $\frac{11}{4} : \frac{1}{2} = \frac{22}{4} = 5\frac{1}{2}$. Wenn man eine ganze Zahl theilen soll: so kann man die Zahl zu einem unächten Bruche machen, und die Theilung anstellen. Z. B. anstatt $2 : \frac{1}{2}$ setzet $\frac{2}{1} : \frac{1}{2} = \frac{4}{1}$. Anstatt $\frac{3}{4} : 2$ setzet $\frac{3}{4} : \frac{2}{1} = \frac{3}{8}$.

98 §. Wenn man mit ächten Brüchen theilet: so kömmt zuweilen eine ganze Zahl, oder eine grösere Zahl, als die getheilte heraus. Z. B. $\frac{1}{2}$ Taglohn bringt $\frac{3}{4}$ fl.; wie viel wird dieses für einen ganzen Taglohn machen? $\frac{3}{4}$ wird mit $\frac{1}{2}$ getheilet, und gibt für einen Taglohn $1\frac{1}{2}$ fl. Dieses ist nun nicht so zu verstehen, als wäre $1\frac{1}{2}$ in $\frac{3}{4}$ enthalten gewesen; sondern es heist: $\frac{1}{2}$ läßt sich von $\frac{3}{4}$ ein und einhalbmal abziehen. Eben so vielmal muß man nun den Taglohn $\frac{3}{4}$ fl. nehmen, welcher alsdann $1\frac{1}{2}$ fl. für einen Tag machen wird.

99 §. Brüche, die 2 Nenner bekommen, werden zusammengesetzte, oder doppelte

oder gebrochene Brüche genennet, als: $\frac{\frac{1}{2}}{2}$, welches ein halbes Viertel bedeutet. $\frac{\frac{1}{2}}{3}$ heist der dritte Theil von $\frac{1}{2}$. Diese Brüche werden in einfache verwandelt, wenn die beiden Nenner miteinander vervielfältiget werden. Denn die Hälfte, ein Drittel u. s. w. von einem Bruche nehmen, heist anders nichts, als den Bruch 2mal, 3mal u. s. w. kleiner machen, welches man durch die Vervielfältigung des Nenners ausführet (75 §). Wäre aber $\frac{1}{2}$ mit $\frac{2}{3}$ zu theilen: so würden die Zähler auch noch miteinander vervielfältiget; weil man den dritten Theil von $\frac{1}{2}$ 2mal nehmen müßte.

100 §. Zuweilen wird auch ein Bruch gegeben, welchen man in einen andern gleichen Bruch verwandeln soll, wozu man den Zähler, oder Nenner angibt. Z. B. $\frac{2}{3}$ soll in einen gleichen Bruch verwandelt werden, wozu der Zähler 24 sein soll. Der gegebene Zähler wird mit dem Zähler des Bruches getheilet, und der Inhalt von diesem Antheile 12 und dem Nenner 3 gibt 36 zum Nenner für den Zähler 24, und der verlangte Bruch $\frac{24}{36}$ wird $\frac{2}{3}$ gleich sein. Soll aber 24 der Nenner sein: so wird 24 mit dem Nenner 3 getheilet, und der Inhalt von dem Antheile 8 und dem Zähler 2 gibt 16 zum Zähler für den Nenner 24; der Bruch

ist allso: $\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$. Denn Brüche behalten ihre Gleichheit: wenn Zähler, und Nenner mit einerlei Zahl vervielfältiget werden (75 §). Man muß allso 2 mit einer Zahl vervielfältigen, welche mit 3 den Nenner 24 gibt. Theilet man nun die gegebene Zahl 24 mit 3: so findt sich diese Zahl.

101 §. In dem Rechnen geben die Brüche nicht eine geringe Erleichterung. Deßwegen arbeiten diejenigen, welche sich in denselben einen deutlichen Begriff erworben haben, lieber in Brüchen, als in grosen ganzen Zahlen. In der Vervielfältigung der benannten Zahlen zeigen die Brüche einen besondern Vortheil, welcher darin besteht, daß man die benannte Zahl in einen Bruch verwandelt. Z. B. 4 Gulden 24 Kreuzer sollen mit 6 fl. und 9 kr. vervielfältiget werden. Zu diesem Ende werden 24 kr. in $\frac{24}{60}$ (73 §), oder in $\frac{2}{5}$ fl. (78 §) verwandelt. Nun wird

fl.	kr.		fl.
4	24	=	$4\frac{2}{5}$
6	9		
			24
			$2\frac{2}{5}$
			36
			$3\frac{3}{5}$
			66

$4\frac{2}{5}$ fl. mit 6 vervielfältiget, und es entsteht der Inhalt 24 und $2\frac{2}{5}$ fl. Darauf wird $4\frac{2}{5}$ mit 9 vervielfältiget, und der Inhalt wird 36 und $3\frac{3}{5}$ fl., deren Summe 66 fl. ausmachet.

Die Vervielfältigung wird noch leichter: wenn der Zähler des Bruches 1 wird, welches man dadurch zuwege bringet: indem 24 allso zergliedert wird, daß jedes Stück einen besondern Bruch ausmache, welches man durch Versuchen findet. 24 wollen wir in 20 + 4 zerlegen, welches angeht; denn 20 kr. ist $\frac{1}{3}$ fl. und 4 kr. ist $\frac{1}{15}$ fl. Jetzt nehme man anstatt 4 fl. 24 kr., $4\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{15}$ fl, und vervielfältige dieses mit 6 und 9. Der Inhalt von $4\frac{1}{3}$ fl.

fl.	kr.	
4 -	- 24	$24 = 20 + 4$
6 -	- 9	$\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$
24		
2 -	- 24	$= \frac{6}{3} + \frac{6}{15}$
36		
3 -	- 36	$= \frac{9}{3} + \frac{9}{15}$
66		

ist 24 und 2 fl. Der Inhalt von $\frac{1}{15}$ und 6 ist $\frac{6}{15}$; weil aber 4 kr. $\frac{1}{15}$ ist: so wird 6 mit 4 vervielfältiget, und gibt 24 kr. Der Inhalt von $4\frac{1}{3}$ fl. und 9 ist 36 und 3 fl. Der Inhalt von $\frac{1}{15}$ und 9 ist $\frac{9}{15}$, oder 36 kr.; weil $\frac{1}{15}$ fl. 4 Kreuzer gibt.

Diese besondere Zahlen werden zusammengezählet, und geben 66 fl. für den Hauptinhalt.

Aus diesem Verfahren ensteht diese allgemeine Regel: **wenn der Vervielfältiger grösser ist, als der Nenner: so wird jener mit dem Nenner getheilet, und gibt die grösere Art. Ist aber der**

Vervielfältiger kleiner, als der Nenner: so wird der Vervielfältiger mit der ganzen Zahl, welche dem Bruche gleich ist, vervielfältiget, und der Inhalt behält den Namen von der ganzen Zahl.

Nach dieser Regel sind folgende Beispiele ausgearbeitet.

Thal.	Sgr.	Pf.		
6 --	13 --	4	13 = 12 + 1	5 = 3 + 2
9			$\frac{1}{2} + \frac{1}{24}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$

54
4 -- 12 —— = $\frac{9}{2}$
-- 9 —— = $\frac{9}{24}$
2 — 3 = $\frac{9}{4}$
1 — 6 = $\frac{9}{6}$

60 -- 〃 -- 9

℔	Lot.	
3 --	14	14 = 8 + 4 + 2
7		$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

21
1 -- 24 = $\frac{7}{4}$
-- 28 = $\frac{7}{8}$
-- 14 = $\frac{7}{16}$

24 -- 2

102 §. Aufgaben zur Uebung.

1) Wie viel Achtel wird man aus 24 machen können? Antw. $\frac{192}{8}$.

2) Man soll 3 fl. zu Sechsteln machen, wie viel wird es geben? Antw. $\frac{18}{8}$ fl.

3) Der wie vielste Theil sind 24 kr. von einem Gulden? Antw. $\frac{24}{60}$, oder $\frac{2}{5}$.

4) Einer hat $\frac{2}{5}$ und der andere $\frac{48}{120}$; welcher von beiden hat das meiste? Keiner, sie haben beide eben viel.

6) Wie viel Kreuzer machen $\frac{3}{24}$ Thaler? Antw. 11$\frac{1}{4}$ Kreuzer.

7) Wie gros ist die Summe von $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{15}$? Antw. $\frac{26}{15} = 1\frac{11}{15}$.

8) Ein Spieler verliert $\frac{3}{4}$, und gewinnt wiederum $\frac{1}{8}$ seines Geldes, das er zum Spiele gebracht hat; wie stark ist sein Verlust? Antw. $\frac{5}{8}$.

9) Wenn 1 Pfund 3 Gulden kostet; wie viel wird $\frac{3}{4}$ kosten? Antw. 2$\frac{1}{4}$ fl.

10) Man verlanget einen Bruch, der 36 zum Nenner habe, und dem Bruche $\frac{3}{4}$ gleich sei? Antw. $\frac{27}{36}$.

11) Zu dem Zähler 36 soll man einen Nenner suchen, damit der Bruch dem Bruche $\frac{3}{4}$ gleich werde. Dieser ist 48.

IX Hauptstück.

Von den zehntheiligen Brüchen.

103 §. Brüche, deren Nenner 10, 100, 1000 u. s. w. ist, nennet man zehntheilige Brüche, (Decimalbrüche): weil das Ganze in 10 Theile, oder in das Vielfache von 10 und 10 getheilet werden soll. Dergleichen Brüche sind $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ u. s. w.

104 §. Unsere Zahlen haben ein solche Ordnung, daß unter vielen Ziffern diejenige, welche einer andern zur Rechten steht, 10mal kleiner ist, als die erste; die dritte 10mal kleiner, als die zweite, und 100mal kleiner als die erste (3 §). Dieselbige Ordnung findt sich in den zehntheiligen Brüchen. $\frac{1}{1000}$ ist 10mal kleiner, als $\frac{1}{100}$; und 100mal kleiner, als $\frac{1}{10}$; und 1000mal kleiner, als 1. Man kann allso diese Brüche ohne Nenner, wie ganze Zahlen schreiben, und den Nenner aus der Anzahl der Ziffern bestimmen: wenn man nur die Bruchsziffern von den Ziffern der ganzen Zahl zu unterscheiden weiß. Die ganzen Zahlen werden aber von den Bruchsziffern durch einen Beistrich unterschieden, worauf alsdann der Bruch anfängt. Wenn kein Ganzes da ist: so wird diese Stelle mit 0 ausgefüllet, sie kann aber auch leer bleiben. Z. B. 0,1 und, 1 heist $\frac{1}{10}$. 3,403 heist

3

$3\frac{403}{1000}$. Man bezeichnet auch die letzte Bruchsziffer mit so vielen Strichen, als der Nenner Nullen haben soll, als: 1′ ist eben so viel, als 0,1; und 3403‴ ebenso viel, als 3,403.

105 §. Jeden Bruch in einen beliebigen zehntheiligen Bruch verwandeln.

Zu dem Zähler des Bruches setzet man so viel Nullen, als der zehntheilige Nenner haben soll, und theilet diesen Zähler mit dem Nenner. Was herauskömmt, ist der Zähler zum zehntheiligen Bruche. Oder man setzet zum Zähler des gemeinen Bruches eine Nulle, und theilet mit dem Nenner; was herauskömmt, ist der Zähler zum Nenner 10. Wenn nach dieser Theilung noch etwas übrig bleibt: so setzet man wieder eine Nulle dazu, und theilet mit dem vorigen Theiler. Dieses Zusetzen und Theilen treibt man so lang, als man will, oder bis nichts übrig bleibt. Z. B. aus $\frac{1}{2}$ wird $\frac{5}{10}$ = 0,5: wenn man zum Zähler 1 eine Nulle setzet, und die neue Zahl 10 mit dem Nenner 2 theilet. Aus $\frac{3}{4}$ wird $\frac{75}{100}$ = 0,75: wenn man zu 3 zwo Nullen setzet, und die neue Zahl 300 mit 4 theilet; oder wenn man zu 3 eine Nulle schreibt, und 30 mit 4 theilet: so wird man $\frac{7}{10}$ = 0,7 bekommen, 2 bleibt bei dieser Theilung noch übrig. Zu 2 setze man eine Nulle, und theile nun 20 mit 4: so wird man

man $\frac{5}{100}$ bekommen. $\frac{7}{10}$ und $\frac{5}{100}$ geben $\frac{75}{100}$ = 0,75. Wer die Ursache dieser Berechnung verlanget; der betrachte, daß die Zähler mit 10, oder 100 vervielfältiget werden: wenn man eine oder zwo Nullen dazu schreibt (33 §), woraus die Theilung anders nichts, als 10tel oder 100tel hervorbringen kann (41 §).

106 §. Wenn $\frac{1}{3}$ zu einem zehentheiligen Bruche gemachet wird: so wird nach jeder Theilung noch etwas übrig bleiben. In diesem Falle begnüget man sich mit etlichen Ziffern, als $\frac{1}{3}$ = 0,3333333, woran aber noch ein millionster Theil abgeht, welchen man wegen seiner Kleinigkeit nicht achtet.

107 §. Zehntheilige Brüche zusammenzählen, und abziehen.

Man schreibt sie untereinander, wie ganze Zahlen, und zieht sie zusammen oder von einander ab. Z. B.

$\frac{1}{2}$ = 0,5 | $\frac{1}{6}$ = 0,1666 u. s. w.
$\frac{3}{4}$ = 0,75 | $\frac{5}{6}$ = 0,8333 u. s. w.
$1\frac{1}{4}$ = 1,25 | $\frac{6}{6}$ = 0,9999 = 1,0000

Abziehung.

$\frac{3}{4}$ = 0,75 | $2\frac{1}{3}$ = 2,3333
$\frac{1}{2}$ = 0,5 | $\frac{3}{4}$ = 0,75
$\frac{1}{4}$ = 0,25 | $1\frac{7}{12}$ = 1,5833

108 §. Die leeren Stellen von einigen Brüchen kann man mit Nullen ausfüllen, damit die Zahlen eben lang werden. Z. B.

0, 75	2, 3333
0, 50	0, 7500
0, 25	1, 5833

Diese Arbeit erspart man: wenn man die Ordnung der Ziffern beobachtet.

109 §. Man muß sich nicht verwundern, daß in dem zweiten Beispiele der Zusammenziehung die Summe 0, 9999, anstatt 10000, herausgekommen ist: da doch $\frac{1}{6}$ und $\frac{5}{6} = \frac{6}{6}$ oder 1 ist. Denn 0, 1666 ist nicht vollkommen $\frac{1}{6}$, wie auch 0, 8333 nicht genau $\frac{5}{6}$ ist; weil diese Brüche sich nicht vollständig durch zehntheilige Brüche vorstellen, und immer etwas übrig lassen, welcher Ueberschuß die ganze Zahl herstellen hilft.

110 §. **Zehntheilige Brüche miteinander vervielfältigen.**

Man vervielfältiget diese Zahlen, wie die Ganzen. In dem Inhalte werden die Bruchsziffern aus den Bruchsziffern der Vervielfältiger bestimmet, nämlich so viel in beiden sind: eben so viel werden in dem Inhalte abgezählet.

0, 75	0, 75
0, 5	1, 5
0, 375	375
	75
	1, 125

In

In beiden Beispielen werden im Inhalte 3 Bruchsziffern abgeschnitten; weil beide Vervielfältiger von jedem zusammen drei Bruchsziffern haben. Dieses Verfahren hat seinen Grund in den Brüchen. Denn 0, 75 $= \frac{75}{100}$ und 1,5 $= \frac{15}{10}$ (103 §). $\frac{15}{10}$ mal $\frac{75}{100}$ gibt $\frac{1125}{1000}$ (91 §.), welches sich in 1, 125 verwandelt (105 §).

111 §. Diejenigen, welche die zehntheiligen Brüche mit Strichen bezeichnen, zählen die Striche der Vervielfältiger, und setzen ihre Anzahl über die letzte Ziffer des Inhaltes. Z. B. 15′ mal 75″ = 1125‴, welches eben so viel ist als 1, 125.

112 §. **Zehntheilige Brüche miteinander theilen.**

Man theilet wie in ganzen Zahlen. Der Unterschied der Bruchsziffern von dem Theiler, und der Theilungszahl bestimmet die Bruchsziffern des Antheiles.

$$\frac{1,125}{1,5} = 0,75.$$

Der Antheil 075, oder 75 hat zwo Bruchsziffern; weil die Theilungszahl, ihrer drei, und der Theiler eine hat, wovon 2 der Unterschied ist, und die zwo Ziffern 75 zu Bruchsziffern machet. Diese Theilungsart wird auch aus den gemeinen Brüchen genomm-

nommen. Denn 1,125 = $\frac{1125}{1000}$, und 1,5 = $\frac{15}{10}$. Wird nun $\frac{1125}{1000}$ mit $\frac{15}{10}$ getheilet: so entsteht $\frac{11250}{15000} = \frac{1125}{1500}$ (96 §). Man mache diesen Bruch zu einem zehntheiligen; und man wird dafür 0,75 bekommen (105 §).

113 §. Wem diese Rechnungsarten etwas schwer vorkommen; der setze die gehörigen Nenner zu den Bruchszahlen, und rechne nach den Regeln der gemeinen Brüche. Z. B. es soll 1,125 mit 1,5 getheilet werden. Die erstere Zahl wird in $\frac{1125}{1000}$; und die zweite in $\frac{15}{10}$ verwandelt. Nun theile man damit: und es wird $\frac{11250}{15000}$ daraus werden.

Es soll 0,75 mit 0,5 vervielfältiget werden. 0,75 = $\frac{75}{100}$, und 0,5 = $\frac{5}{10}$ (104 §). Nun ist $\frac{75}{100} \times \frac{5}{10} = \frac{375}{1000}$.

Endlich sollen 0,75, und 0,5 zusammengezählet werden, Der erstere Bruch gibt $\frac{75}{100}$, und der zweite $\frac{5}{10}$, welcher auch $\frac{50}{100}$ ausmachet (76 §), und die Summe $\frac{125}{100}$ hervorbringt.

X Hauptstück.

Die Regel von Dreien.

114 §. Wenn Dinge, die einen gewissen Werth, oder eine Bestimmung haben,

haben, ihre Grösse verändern; so verändern sie auch ihren Werth. Eine zweifache Grösse gibt einen zweifachen Werth, und eine einfache einen einfachen u. s. w. Haben nun gleichartige Dinge ihre Grösse verändert: so kann man den Werth von einem finden, wenn der andere schon bekannt ist. Es kömmt allso in dieser Untersuchung dreierlei vor, nämlich: ein gewisses Ding und sein Werth; eben dasselbige Ding in veränderter Grösse, wozu man den Werth suchet. Die Regel, nach welcher man aus dreien bekannten das gleichnamige Unbekannte findet, heist deßwegen die Regel von Dreien (Regel detri). Wegen ihres vielfältigen Nutzens wird sie auch die göldene Regel genennet.

115 §. Weiß man den Werth des einfachen Dinges: so läßt sich der Werth des Vielfachen finden: wenn man den Werth des Einfachen so vielmal nimmt, als das Vielfache Einheiten hat, welches durch die Vervielfältigung bewerkstelliget wird (29 §). Nämlich: 1 Gulden hat 60 Kreuzer, und 3 Gulden haben diese 60 Kreuzer 3mal. Der Werth des Einfachen ist nicht immer bekannt. Es kömmt allso in der Regel von Dreien darauf an, daß man den Werth des Einfachen ausfindig machet. Wird der Werth des Vielfachen gegeben: so findet sich der

F Werth

Werth des Einfachen: wenn der Werth des Vielfachen mit der Gröse des Vielfachen getheilet wird. Denn der einfache Werth ist so vielmal in dem Werthe des Vielfachen enthalten, als das Vielfache gros ist. Wie vielmal etwas in dem andern enthalten ist, dieses wird durch die Theilung gefunden (39 §). Z. B. das wochentliche Kostgeld für 4 Kostgänger soll in 12 Gulden bestehen; wie gros wird es für einen Kostgänger sein? Weil 12 fl. das Kostgeld für 4 Kostgänger ist: so ist 12 fl. das Kostgeld eines Kostgängers 4mal. Der vierte Theil von 12 ist allso das Kostgeld für einen Kostgänger, welcher sich anders nicht, als durch die Theilung finden läßt, nämlich $\frac{12}{4}$ gibt 3 Gulden. Es mögen nun so viel Kostgänger sein, als es immer will: so läßt sich ihr Kostgeld finden: wenn man 3 Gulden als das Kostgeld eines Kostgängers mit der Zahl der Kostgänger vervielfältiget.

116 §. Dieses Verfahren gibt die Natur der Dinge an. Will man es aber durch eine gewisse Ordnung denen, welche diese Einsicht noch nicht haben, beibringen: so schreibe man die drei bekannten Zahlen in eine Reihe. Die Zahl des Dinges, wozu man etwas suchet, steht zur Rechten und heist die **Fragzahl**. Zur Linken kömmt die Zahl zu stehen, wo-

von man schon den Werth hat, welcher die Mitte einnimmt. Nun bedeutet die erste Zahl, die nämlich zur Linken steht, die Grösse eines Dinges; die zweite den Werth, oder eine andere Bestimmuug davon; die dritte bedeutet auch die Grösse eines Dinges von der Art, wie das erste ist, wozu man den Werth suchet, der mit dem Werthe des ersten Dinges von einerlei Art ist. Nun heist die Regel: **theilet die erste Zahl mit der zweiten, und vervielfältiget das, was durch die Theilung herauskömmt, mit der Fragzahl. Dieser Inhalt wird die vierte und unbekannte Zahl geben.** Z. B. wochentlich verzehren vier Mann 12 Gulden; wie viel werden denn 30 Mann verzehren? setzet nun:

Mann verzehren fl. wie viel Mann?
4 — — — 12 — — — 30

12 wird mit 4 getheilet, und gibt 3 fl. für einen Mann. 30mal 3, oder 3mal 30 gibt 90 Gulden für 30 Mann.

117 §. Es ist in der Rechnung erlaubet rückwärts zu gehen, d. i. da anzufangen, wo man aufgehöret, und dort aufzuhören, wo man angefangen hat. Man kann allso die dritte und zweite Zahl miteinander vervielfältigen, und den Inhalt mit der ersten Zahl

theilen; als: 12mal 30 gibt 360; theilet 360 mit 4, und es wird wiederum 90 herauskommen. Denn weil nach der Regel (116 §) 12 mit 4 getheilet, und mit dem Antheile die Zahl 30 vervielfältiget werden soll: so muß die Zahl 30 mit dem vierten Theile von 12 vervielfältiget werden. Wird nun 30 mit 12 vervielfältiget: so wird der daraus entstehende Inhalt 4mal grösser, als er sein soll. Man theile allso den Inhalt mit 4: so wird er 4mal kleiner, als er war, und als er jetzt sein soll. Aus den Brüchen kann man dieses auch begreifen: 3 ist eben so viel als $\frac{12}{4}$ (71 §). Man kann allso 30 mit $\frac{12}{4}$ anstatt mit 3 vervielfältigen. Wenn 30 mit $\frac{12}{4}$ vervielfältiget wird: so gibt es $\frac{360}{4}$ (89 §). Der Bruch wird verschwinden: wenn 360 mit 4 getheilet wird, und man hat alsdann 90. Jetzt können wir unsere Regel umwenden, und dieselbige nach der Gewohnheit vortragen: **vervielfältiget die Fragzahl mit der zweiten, und theilet diesen Inhalt mit der ersten.** Z. B. 4 Mann verzehren 12 fl. wie viel 30 Mann?

30|4 Theiler.

360|90 Gulden, wie oben.

118 §. Um Anfängern den Gebrauch der Regel von Dreien geläufig zu machen, und ihnen den Grund davon beizubringen, gibt

man

man anfänglich viele Aufgaben, worin der Werth von einem Dinge schon gegeben ist. Hernach läßt man den Werth eines Dinges erst finden. Bei dieser Arbeit kommen freilich den Ungeübten viele Beschwernisse vor, die man aber durch allerhand Kunstgriffe zu heben suchet. Die bestimmte Ordnung (116 §) kann den Rechner gleichsam blindlings zu seinem Zwecke führen, wenn man die Zahlen danach gehörig eingerichtet hat. Sie richten sich aber von selbst ein: wenn man die Fragzahl zu erst hinsetzet, und darüber ihren Namen schreibt. Die erste Zahl muß denselbigen Namen bekommen. Man schreibe allso diesen Namen dahin, und die dazu gehörige Zahl darunter. In die Mitte kömmt die Zahl, welche mit der Unbekannten einerlei Namen hat. Z. B. wie viel Gulden verzehren 20 Mann: wenn 4 Mann 12 Gulden verzehren? Von 30 Mann ist hier die Frage. Ich schreibe das Wort **Mann** hin, und darunter 30. Was will man von diesen 30 Mann wissen? Ihr Kostgeld in Gulden. Den Namen **Gulden** schreibe ich rechts und links neben Mann, zur Linken schreibe ich unter Gulden die Zahl 12. Von Anfange steht wiederum Mann, worunter die Zahl 4 steht. Die zwo ersten Zahlen geben allso die bekannte Sache, und ihre Bestimmung. Finden sich unter drei

Zahlen auch dreierlei Namen: so muß man einen davon auf einen andern bringen. Z.B. wie viel kosten 4 Lothe; wenn 1 Pfund 20 Kreuzer kostet? Hier kommen **Pfund**, **Kreuzer** und **Loth** vor, und nichts läßt sich ändern, als **Pfund** und **Loth**, alsdann steht der Ansatz: 32 Lothe (1 Pfund) kost-en 29 Kreuzer; wie viel kosten 4 Lothe: Soll der Namen **Pfund** beibehalten werd-en: so muß Loth verändert werden, welches geschieht, indem 4 Lothe in einen Bruch verwandelt werden. 4 Lothe sind aber $\frac{4}{32}$ Pf. oder $\frac{1}{8}$ (73. 78 §). Nun heist es: 1 Pfund kostet 20 Kreuzer; wie viel $\frac{4}{32}$ oder $\frac{1}{8}$ Pfund?

Loth. Kr. Loth. Kr.	Pf. Kr. Pf.
32 - 20 - 4 - - -	1 - 20 - $\frac{1}{8}$
4 | 32	$\frac{1}{8}$
80 | $2\frac{16}{32} = 2\frac{1}{2}$	$\frac{20}{8} = 2\frac{1}{2}$
64	
16	

119 §. Kommen mehr, als 3 Zahlen vor: so bringt man dieselben auf drei. Z. B. 1 Pfund kostet 1 Gulden, 48 Kreuzer; wie viel 3 Pf. 8 Lothe? Hier sind fünf Zahlen, die auf drei gebracht werden. Der Gulden wird zu Kreuzern, und die Pfunde zu Lothen gemacht, so heist es: 32 Lothe (1 Pfund)

kosten

kosten 108 kr. (1 fl. 48 kr.); wie viel 104 Lothe (3 Pf. 8 Lothe)? Ant, 351 Kreuzer, oder 5 fl. 51 kr. Man könnte die Aufgabe auch in 2 Fragen zerlegen; als:

32 L. kosten 1 fl.; wie viel 104 L. Ant. 3 fl. 15 kr.
32 L. kosten 48 kr.; wie viel 104 L. Ant. 2 fl. 36 kr.
zusammen 5 fl. 51 kr.

120 §. Die Brüche machen in der Regel von Dreien keine Ausnahme. Man vergesse ihre Natur nicht, und behandele sie nach ihrer Art. Z. B. $\frac{1}{2}$ Ele kostet $\frac{1}{8}$ Gulden; wie viel kosten $\frac{3}{4}$ Ele? $\frac{3}{4}$ mal $\frac{1}{8}$ gib $\frac{3}{32}$ (91 §). Wird $\frac{3}{32}$ mit $\frac{1}{2}$ getheilet: so wird $\frac{6}{32}$ daraus (96 §) = $\frac{3}{16}$ fl. Vermischte Zahlen werden zuvor in einen Afterbruch verwandelt. Z. B. $2\frac{1}{3}$ Maas ist 5 fl. werth; wie viel werden 8 Maas werth sein? setzet $\frac{7}{3}$ anstatt $2\frac{1}{3}$: 5 mal 8 ist 40, wird dieses mit $\frac{7}{3}$ getheilet: so entsteht $\frac{120}{7}$ (97 §) oder $17\frac{1}{7}$ fl.

121 §. Man kann zuweilen durch Abkürzung viel geschwinder die Unbekannte finden. Diese Abkürzung besteht darin, daß man die erste und zweite Zahl; oder die erste und dritte Zahl mit einem gemeinschaftlichen Theiler, wenn sie einen haben, verkleinere, und die Regel mit den verkleinerten Zahlen ausarbeite. Z. B. 4 Mann verzehren 18 Thaler;

wie viel 38 Mann? Hier kann 18 mit 4 getheilet, und der Antheil mit 38 vervielfältiget werden; oder 18 und 38 werden miteinander vervielfältiget, und der Inhalt wird mit 4 getheilet. Ich kürze aber 4 und 18 ab, und theile sie mit 2; weil sie dadurch theilbar sind.

M.		Th.		M.
4	—	18	—	38
:2		:2		
2		9		

Nun ist der neue Aufsatz: 2 Mann verzehren 9 Thaler; wie viel 38? 2 und 9 haben keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr. 2 und 38 sind aber doch noch theilbar und jede mit 2.

2	—	9	—	38
:2				:2
1	—	9	—	19

Hier brauchet man nicht zu theilen; weil der Theiler 1 ist, sondern nur zu vervielfältigen, nämlich 9mal 19 gibt 171 Thaler für die Unbekannte, die man auch ohne Verkürzung gefunden hätte; weil $\frac{18\text{mal } 38}{4} = 171$.

Der Grund der ersten Abkürzung liegt darin; weil man vor der Theilung den Theiler, und die Theilungszahl durch einen gemeinschaftlichen Theiler verkleinern darf (50 §). Daß

aber

aber auch die erste und dritte Zahl abgekürzet werden, gründet sich darauf; weil der Inhalt von 18 und 34 mit 4 getheilet werden darf, welches bedeutet: der Inhalt von 18 und 38 solle viermal kleiner werden (39 §). Der Inhalt wird aber 4mal kleiner: wenn 18 oder 38 vor der Vervielfältigung 4mal kleiner gemacht worden ist. Man darf allso 38 mit 4 theilen, folglich auch diese miteinander abkürzen (50 §). Man kann den Grund davon auch aus den Brüchen herleiten; weil jeder Bruch eine Theilung anzeiget und verkleinert werden kann.

122 §. Es folget aus dem vorhergehenden, daß bei der Abkürzung immer der Theiler sein müsse, und daß die Abkürzung bei der zweiten, und dritten Zahl nicht gelte. Zweitens daß man dabei abwechseln könne: bald wird die erste und zweite; bald die erste und dritte Zahl abgekürzet. Folgende Beispiele sollen dieses weitläufiger zeigen:

I) 12 — 15 — 48 — 60.
:12 :12
1 — 15 — 4
4mal
60

12 und 48 lassen sich mit 12 theilen, und werden in 1 und 4 verwandelt, wodurch denn

60 zur Antwort herauskömmt, wenn 4 mit 15 vervielfältiget wird. 12 und 48 können auch mit 2, 3, 4 u. s. w. getheilet werden. Man hätte auch 12 und 15 abkürzen können, welches 4 und 5 gegeben hätte; alsdann ließen sich 4 und 48 mit 4 abkürzen. Z. B.

II) ~~12~~ — ~~15~~ — 48
:3 :3
4 — 5 — 48
:4 :4
1 — 5 — 12 — 60
5mal
60, wie in dem ersten Beispiele

III) ~~50~~ — 76 — ~~15~~ —
:5 :5
~~10~~ — ~~76~~ — 3
:2 — :2
5 — 38 — 3 — $22\frac{4}{5}$
3mal | 5 Theiler.
114 | $22\frac{4}{5}$

50 und 15 werden mit 5 abgekürzet. Darauf wird 10 und 76 mit 2 abgekürzet.

IV) 5~~0~~ — 76 — 40~~0~~
:10 :10
5 — 76 — 40
:5 :5
1 — 76 — 8 = 608
8mal
608

In

In 50 und 400 wird eine Nulle hinweggestrichen, welches mit 10 theilen heist (49 §). Darauf wird 5 und 40 mit 5 abgekürzet.

123 §. Die Brüche pflegen Ungeübten in dieser Regel sehr fürchterlich vorzukommen, denen weichet man aus: wenn man sich bemühet die Brüche der ersten und zweiten; oder der ersten und dritten Zahl auf einerlei Nenner zu bringen. Hat man es dahin gebracht: so läßt man die Nenner hinweg und arbeitet nur mit den Zählern. Haben die Brüche schon einerlei Nenner: so ersparet man eine Mühe.

I) $\frac{3}{4}$ — $\frac{7}{4}$ — 9
3 — 7 — 9
:3   :3
1 — 7 — 3 — 21
3mal
———
21

Die Nenner 4 werden hinweggelassen, und man brauchet nur die Zähler, als ganze Zahlen. 3 und 9 lassen sich nun mit 3 verkürzen. Indem die Zähler weggelassen werden, geschieht anders nichts, als daß die Zahlen 3 und 7 viermal gröser werden. Wie nun die Gröse eines Dinges 4mal gröser wird: so wird der Werth desselbigen auch 4mal gröser.

II)

II) $\frac{3}{4}$ — 6 — 8

3 — 24 = 8

:3 :3

1 — 8 — 8 — 64

8 mal

64

3 verliert seinen Nenner, und wird dadurch 4 mal grösser. 6 wird mit 4 vervielfältiget, und wird dadurch auch 4 mal grösser.

III) $2\frac{3}{4}$ — $\frac{5}{12}$ — 8

$\frac{11}{4}$ — $\frac{5}{12}$ — 8

$\frac{33}{12}$ — $\frac{5}{12}$ — 8

33 — 5 — 8 — $1\frac{7}{33}$

5 mal

40 | 33

ø | $1\frac{7}{33}$

Die vermischte Zahl wird zu erst zum Afterbruche gemacht. Hernach wird $\frac{11}{4}$ in Zwölftel verwandelt, damit der Nenner 12 hinwegbleiben könne.

IV) $\frac{11}{4}$ — $\frac{5}{12}$ — 8

4) $\frac{11}{1}$ — $\frac{5}{3}$ — 8

33 — 5 — 8 — $1\frac{7}{33}$

Man kann auch die Brüche abkürzen: wenn die Nenner der theilbaren Zahlen getheilet werden, wie hier 4 und 12.

V)

V) $2\frac{2}{5}$ — 1 — 45
$\frac{11}{5}$ — 1 — 45
11 — 5 — 45 — $20\frac{5}{11}$
5 mal
225 | $\frac{11}{20}$

Wenn die erste Zahl in einen Afterbruch verwandelt worden ist: so wird der Nenner alsbald hinweggelassen, und die zweite Zahl damit vervielfältiget.

VI) $\frac{1}{2}$ — $6\frac{2}{3}$ — 14
$\frac{1}{2}$ — $\frac{20}{3}$ — 14
3 — 40 — 14 — $186\frac{2}{3}$
40 mal
560 | 3
$196\frac{2}{3}$

Die zweite Zahl wird zum Afterbruche gemacht. Der Zähler des ersten Bruches wird mit dem Nenner 3; und der Zähler 20 mit dem Nenner 2 vervielfältiget. Eigentlich geschieht keine Abkürzung; wenn man blos die Nenner hinwegbringt. Denn alles dasjenige muß man thun: wenn die Nenner stehen bleiben. Z. B. 14 mal $\frac{20}{3}$ gibt $\frac{280}{3}$. Um dieses mit $\frac{1}{2}$ zu theilen, muß es mit $\frac{2}{1}$ vervielfältiget werden (96 §): so entsteht der Inhalt $\frac{560}{3}$, welcher auch heraus kömmt: wenn 40, das aus 2mal 20 gemacht ist,

mit

mit 14 vervielfältiget, und mit 3 getheilet wird.

VII) 8 — 56 — $\frac{3}{4}$ — $5\frac{1}{4}$

$$168 \left| \frac{4}{42} \right| \frac{8}{5\frac{1}{4}}$$

Hier wird die erste Zahl nicht zum Bruche gemachet; weil man den Inhalt von 168 aus 56 und 3 mit 4 theilen kann, woraus dann 24 kömmt, welches mit 8 getheilet wird; oder weil 56 mit 4 theilbar ist.

VIII) Mann Guld. Kr. Mann Guld.

5 — 7 — 45 — 16 — $24\frac{4}{5}$

$7\frac{3}{4}$

4) $\frac{20}{4}$ — 31 — $\frac{16}{4}$

5 — 31 — 81

4mal

$$124 \left| \frac{5}{24\frac{4}{5}} \right.$$

Dieses Beispiel zeiget, wie Brüche in benannten Zahlen zur Abkürzung dienen können. 45 kr. werden in $\frac{3}{4}$ Gulden verwandelt; dieses geschieht aber: wenn man $\frac{45}{60}$ daraus machet (73 §). Aus $\frac{45}{60}$ wird $\frac{3}{4}$ (78 §).

124 §. In der Regel von Dreien muß man vervielfältigen und theilen. Man prüfet

allso

also die Arbeit, wie man die Vervielfältigung und Theilung untersuchet. Z. B. wenn 4 Mann 12 Gulden verzehren: so werden 30 Mann 90 Gulden brauchen. 90 ist entstanden, da der Inhalt von 12 und 30 mit 4 als der ersten Zahl getheilet worden ist. Wird nun 90 mit 4 vervielfältiget: so wird dieser Inhalt wieder herauskommen (42 §). Die Probe heist nun: **vervielfältiget die erste und vierte Zahl miteinander; und die zweite und dritte. Kommen gleiche Inhalte heraus: so ist die Arbeit richtig.**

125 §. Man kann auch mit einer neuen Regel von Dreien die erste prüfen. Z. B. 12 Gulden? sind für 4 Mann: wofür sind denn 90 Gulden? Nach der Regel wird 30 herausgebracht; oder 30 Mann brauchen 60 Gulden: wie viel brauchen denn 4 Mann? Es werden 12 herauskommen, wie man schon in der ersten Aufgabe gegeben hat. Folglich muß, die erste Auflösung richtig sein; weil diese Untersuchung der Rückweg der ersten Arbeit ist.

126 §. Was man bisher gesagt hat, läßt sich unwidersprechlich erweisen. Allein wie man den Ansatz machen soll, dazu lassen sich keine gewisse Regeln angeben. Man muß mit den Sachen wohl bekannt sein: wenn

man

man seine Aufgabe auflösen will. Je mannigfaltiger die Kenntniß eines Rechners ist: desto mehr wird er im Stande sein aufzulösen. Daher kömmt es denn, daß die Regel von Dreien jungen Anfängern so schwer fällt. Diese beschäftige man mit Sachen, die sie täglich vor Augen haben. Wie sich die Kenntnisse der Dinge vermehren: so werden sie auch ihre Fertigkeit im Rechnen anzuwenden wissen. Um aber auch denen, die schon über die gemeine Sachen hinaus sind, etwas mehr zum Nachdenken zu geben, werden etliche schwere Aufgaben zur Uebung folgen.

127 §. Aufgaben zur Regel von Dreien.

1) Ihrer 6 gewinnen 7800 Gulden: einer bekömmt so viel als der andere; wie viel wird jeder bekommen? Antw. 1300 fl.

2) Ein Fenster hat 150 Glasscheiben, jede Scheibe kostet 3 Kreuzer; wie theuer wird das ganze Fenster sein? Antw. $7\frac{1}{2}$ Gulden.

3) 1 Zentner, oder 100 Pfunde kosten $8\frac{1}{2}$ fl.; wie viel wird ein Pfund kosten? Antw. $5\frac{1}{10}$ Kreuzer.

4) 1 französischer Thaler gilt $2\frac{3}{4}$ fl., und hat 6 Liver; wie viel gilt 1 Liver? Antw. $27\frac{1}{2}$ kr.

5)

5) An einer Ele gewinnet man $\frac{1}{8}$ Kreuzer; wie viel wird man an 100 Elen gewinnen? Antw. 12$\frac{1}{2}$ kr.

6) Einer verzehret täglich einen Gulden; wie viel thut dieses in einem Jahre? Antw. 365 fl. in einem Schaltjahre 366 fl.

7) 100 Gulden geben 4 fl. Zins; wie viel wird 1 fl. geben? Antw. /$\frac{2}{5}$ kr.

8) 100 Gulden geben 5 fl. Zins; wie viel geben 8000? Antw. 400.

9) 100 fl. geben 5 fl. Zins; wie viel gibt 1 fl.? Antw. $\frac{1}{20}$ fl. oder 3 kr.

10) Wie gros muß das Kapital sein: wenn ich 365 Thl. Zins ziehen will: und von 100 Thl. 5 verlange? Antw. 7300 Thlr.

11) Wie gros muß ein Kapital sein um täglich 18 Batzen zu verzehren: wenn man 4$\frac{1}{2}$ fl. von 100 verlanget? Antw. 9733$\frac{1}{3}$ fl.

12) Ein Kaufmann hat 5 Zentner Waare, jeden Zentner zu 35 fl., das Pfund verkaufet er um 24 kr.; wie viel hat er gewonnen? Antw. 25 fl.

13) Einer verkaufet seine Weine; er gewinnet an jedem Hunderte 10 fl. und bekömmt in allem 8000 fl.; wie viel hat der Weinhändler gewonnen, und wie viel hat der Wein gekostet? Antw. 727$\frac{3}{11}$ fl. war der Gewinn, und 7272$\frac{8}{11}$ fl. kostete der

G Wein.

Bayerische Staatsbibliothek München

Wein. Man merke sich hier, daß 8000 Kapital und Zins zusammen sind, damit auch das erste Glied aus der Summe des Kapitals und Zinses, nämlich aus 110 bestehe. Ist aber statt Gewinnes Verlust: so muß der Zins von 100 abgezogen werden; weil in dem erlösten Gelde der Zins abgeht, wie folgende Aufgabe zeiget.

14) Ein Weinhändler verkaufet seine Weine für 8000 fl., und verliert 10 an 100 fl.; wie theuer hat er den Wein eingekaufet? Antw. für 8888 $\frac{8}{9}$ fl. Denn, weil er 10 an 100 verliert: so bleibt ihm davon nur 90, und der Aufsatz ist dieser: bei seinem Verluste hat er 90 anstatt 100; wie viel hat er anstatt 8000?

15) Es sollen 12000 Gulden verschicket werden; von 100 bezahlet man 12 Kreuzer Fracht. Wie viel muß man noch zu 12000 fl. legen, damit die Fracht von dem Empfänger bezahlet werde, und er gerad 12000 fl. bekomme? Antw. 24 fl. 2 $\frac{442}{499}$ kr. Weil 12 kr. von 100 fl. bezahlet werden: so bekäme der Empfänger nur 99 fl. 48 kr.: wenn man ihm 100 fl. schickete. So ist der Aufsatz: zu 99 fl. 48 kr. gehören noch 12 kr.: wie viel zu 12000?

16) Wenn die Fracht $\frac{1}{5}$ von 100 wäre; wie viel müßte man zu 12000 legen? Antw. 24 $\frac{24}{499}$ fl. Nämlich: wenn 99 $\frac{4}{5}$ ohne Abzug

zug empfangen werden soll: so gehört $\frac{1}{5}$ dazu; wie viel alsdann zu 12000?

17) Wie viel wird man nach 3 Jahren an Kapital und Zins haben: wenn 12000 fl. zu 5 von 100 angeleget werden? Antw. 13800. Der Aufsatz ist: 100 sind nach 3 Jahren 115; wie viel 12000?

18) Kapital und Zins machen nach 3 Jahren zusammen 13800 fl.; wie gros war das Kapital zu 5 von 100? Antw. 12000 fl.

19) Ein fleisiger Hauswirt legt 12000 fl. auf Zins, und zieht 5 von 100; wie er den Zins einnimmt: so legt er ihn wieder auf Zins. Wie reich wird dieser nach 3 Jahren sein? Antw. 13891 $\frac{1}{2}$ fl. Man setze: 100 gibt 5
oder 20 gibt 1; wie viel 12000?
Antw. 600 Zins.
dazu 12000 Kap.

Der Reichthum nach 1 Jahre = 12600

20 — 1 — 12600? Antw. 630 Zins.
12600 Kap.

nach 2 Jahren = 13230

20 — 1 — 13230? Ant. 661 $\frac{1}{2}$ Zins.
13230 Kap.

nach 3 Jahren = 13891 $\frac{1}{2}$

Man kann auch solchergestalt verfahren:

100 gibt über ein Jahr 105,
oder 20 gibt über ein Jahr 21; wie viel gibt 12000 über ein Jahr? Antw. 12600
20 — 21 — 12600? 13230
20 — 21 — 13230? $13891\frac{1}{2}$
Wie man diese und dergleichen Aufgaben kürzer lösen könne, wird man unten sehen.

20) Ein Kapital von 12000 fl. hat an Zins auf Zins 1200 fl. in 2 Jahren getragen: wie hoch ist das Hundert angeleget worden? Antw. zu 5 fl.

21) A will für ein Gut 22000 fl. gleich geben: B biethet 24000, welche er in Zeit von 3 Jahren, jedesmal mit 6000 fl. bezahlen will; er legt aber 6000 fl. gleich baar hin. Wer hat das meiste gebothen? Antw. B, weil man aus seinem Gelde $25860\frac{3}{4}$ zusammen bringt: wenn man jede 6000 nach der Anzahl ihrer Jahre mit dem Zinse berechnet, da 22000 fl. nur $25467\frac{3}{4}$ betragen.

22) Ein Schuldner soll über ein Jahr 20000 fl. ohne Zins bezahlen. Der Schuldherr verlangt die Schuld jetzt; wie viel soll der erstere bezahlen? Antw. $19047\frac{13}{21}$. Der Aufsatz ist: anstatt 21 über ein Jahr wird 20 bezahlet: wie viel anstatt 20000?

23) Nach 3 Jahren sollen 27783 fl. bezahlet werden; diese werden aber jetzt gleich verlanget: wie viel soll man dafür bezahlen? Antw. 24000 fl.

24) Es sollen 3000 fl. dergestalt in 3 Jahren bezahlet werden, daß nach jedem Jahre 1000 abgetragen werden. Wie viel müßte man jetzt baar bezahlen: wenn man alles auf einmal verlangte? Ant. $2723\frac{2297}{9261}$ Denn anstatt 1000 gibt man nach

3 Jahren --- $863\frac{7757}{9261}$
nach 2 — — — $907\frac{13}{441}$
nach 1 — — — $952\frac{8}{21}$

25) Einer hat die Hälfte seines Geldes in einem Beutel; im Spiele hat er $\frac{1}{3}$ seines Geldes, und noch 14 fl. dazu verloren; wie viel hat er in allem gehabt? Antw. 84 fl. Denn $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ seines Geldes, und 14 fl. machet all sein Geld aus. $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ machet $\frac{5}{6}$ seines Geldes, folglich muß 14 fl. $\frac{1}{6}$ davon sein. Nun heist es: $\frac{1}{6}$ gibt 14 fl.; wie viel $\frac{6}{6}$?

26) Drei kaufen sich ein Kalb für 6 fl. der Erste nimmt davon $\frac{1}{3}$, der Zweite $\frac{1}{4}$, und der Dritte 10 ℔; wie schwer war das Kalb, und wie viel hat jeder davon bekommen? Antw. Es hat 24 ℔ gewogen, wovon der Erste 8, der Zweite 6, und der Dritte 10

bekommen, wonach die Zahlung leicht zu berechnen ist.

27) Einer hat sein Geld in 4 Beuteln, in dem ersten $\frac{1}{7}$ seines Geldes; im zweiten $\frac{1}{5}$; im dritten $\frac{1}{6}$, und im vierten das übrige. In den 3 ersten sind zusammen 321 fl.; wie viel Geld hat er, und wie viel war in jedem Beutel? Antw. 630 fl. Der Aufsatz ist: $\frac{107}{210}$ ($\frac{1}{7}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$) machen 321 fl.; wie viel $\frac{210}{210}$?

28) Einer zählet sein Geld, und findet, daß $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ seines Geldes um 3 grösser sei, als sein Geld selbst; wie viel hatte er? Antw. 36 fl. Wenn man die Brüche zusammenzählet: findet sich, daß die genannten Theile von 12 um 1 grösser sind; man setzet allso: wenn diese Theile um 1 grösser sind: so ist es die Zahl 12. Es sind aber die Theile um 3 grösser; welche Zahl ist es alsdann?

29) Ein Both geht täglich 10 Stunden. Nach 4 Tagen geht ihm ein anderer nach, der täglich 12 Stunden abmachet; wann wird dieser den ersten einholen? Antw. in 20 Tagen. Denn, wenn der zweite um 2 Stunden in 1 Tage näher kömmt; in wie viel Zeit wird er um 40 Stunden näher kommen? In 20 Tagen macht der erste 200 Stunden, und in 4 Tagen 40; sein ganzer Weg ist allso von 240 Stunden. Der zweite geht täglich

12 Stunden; folglich in 20 Tagen 240, wobei er denselbigen Weg mit dem ersten abgemacht und ihn allso eingeholet hat.

30) Wenn der erste Both täglich 10 Stunden abmachet, und 4 Tage vor hat; wie viel Stunden muß der zweite täglich machen, um den ersten in 20 Tagen einzuholen? Antw. 12 Stunden. Denn in 20 Tagen muß er 240 Stunden machen; wie viel in 1?

31) Ein alter Haas hat 50 Sprünge vor einem jungen, und ihre Sprünge sind gleich gros. In der Zeit aber, daß der alte 4 Sprünge machet, thut der junge 5; wie viel Sprünge wird der alte noch thun, bis er eingeholet wird? Antw. 200. Denn, weil der alte 50 vor hat: so muß der junge diese 50 einholen, nämlich: 1 Sprung gewinnt er bei 4 Sprüngen des alten; bei wie viel Sprüngen wird er 50 gewinnen? Bei 200. Der alte macht allso in allem 250 Sprünge, und alsdann wird er eingeholet. Eben diese 250 Sprünge muß der junge machen, unterdessen daß der alte 200 abmachet. Denn macht der alte 4: so macht der junge 5. Nun hat der alte 200 gemacht; wie viel soll nun der junge machen? Ant. 250.

32) Ein Haas hat 780 Sprünge vor, den ein Hund verfolget. Der Hund thut 4 Sprünge, bis der Haas 3 thut: und 5 Hundssprünge sind so gros als 7 Haasensprünge. Wann wird der Haas eingeholet werden? Antw. Wenn er noch 900 Sprünge, und in allem 1680 gemacht hat. Erstlich machet man die 4 Hundssprünge so gros, als die Haasensprünge, wenn man sezet: 5 Hundssprünge sind so gros, als 7 Haasensprunge; wie gros sind 4 Hundssprünge? Antw. $\frac{28}{5}$ Haasensprünge. Thut nun der Haas 3 Sprünge: so macht der Hund $\frac{28}{5}$ solcher Sprünge, und gewinnet $\frac{13}{5}$ bei 3 Haasensprüngen; wie viel bei 780?

33) Es hat 5 Uhr geschlagen, nun fraget man, wann der Minutenzeiger den Stundenzeiger einholen werde? Ant. in $\frac{5}{11}$ einer Stunde, das ist, der Minutenzeiger wird den Stundenzeiger zwischen 27 und 28 Minuten erreichen.

XI Hauptstück.

Von der verkehrten Regel von Dreien.

128 §. Aus dem, was bishieher von der Regel von Dreien gesagt worden ist, hat man schliesen müssen, daß die zweite Zahl sich immer nach der ersten; und die un-

be-

bekannte nach der dritten gerichtet hat. Je gröser oder kleiner die dritte gegen die erste war: desto gröser oder kleiner war auch die unbekannte gegen die dritte ausgefallen. Allein es kommen Fälle vor, wo diese Anwendung nicht angeht: wenn die Zahlen in beschriebener Ordnung aufgesetzet sind. Als: wenige Arbeiter brauchen viele Zeit; viel Zeit brauchet wenige Arbeiter u. s. w. Z. B. eine gewisse Arbeit wird in 12 Wochen von 8 Arbeitern fertig; nun möchte man diese Arbeit durch 4 Arbeiter endigen: wie viel Zeit wird man dazu nehmen? Jetzt steht der Aufsatz: 8 Arbeiter brauchen 12 Wochen; wie viel brauchen alsdann 4 Arbeiter? Hier könnte man es leicht versehen: wenn man nach obiger Regel rechnen wollte, wodurch man denn für 4 Arbeiter eine Zeit von 6 Wochen herausbringen würde, welche Zeit für so viele gewiß zu gering wäre. Es ist allso hier ein anderer Weg nothwendig, auf welchen uns die Natur wiederum leiten muß. Dieselbige Arbeit, welche für 8 Arbeiter ausgemessen war, soll nun von 4 Arbeitern vollendet werden. Man setzet voraus, daß ihr Fleis einerlei ist: so wird man ohne Anstand einsehen, daß diese 4 Arbeiter mehr Zeit anwenden müssen, als 8. Denn diese 4 arbeiten nicht mehr, als 4 Arbeiter von den 8; weil sie einerlei Fleis anwenden. Den

Abgang der Arbeiter muß allso die Zeit ersetzen, und zwar so, daß die Zeit um so viel gröser werde, als die Zahl der Arbeiter verkleinert worden ist. Nun ist die Zahl der 4 Arbeiter 2mal kleiner: so muß denn die Zeit 2mal gröser werden. Um wie vielmal eine Zahl kleiner ist, als die andere: findet man durch die Theilung (39 §): es muß allso 8 mit 4 getheilet werden, womit die Zeit 12 vervielfältiget wird, indem sie so vielmal gröser werden soll (29 §). Auch hier darf man am letzten theilen.

129 §. Nun heist die Regel zu dergleichen Aufgaben: **vervielfältiget die erste und zweite Zahl, und theilet den Inhalt mit der Fragzahl. Oder: theilet die erste Zahl mit der Fragzahl, und vervielfältiget den Inhalt mit der zweiten.** Hier ist die Fragzahl der Theiler, welcher zuvor die erste Zahl war. Deßwegen heist diese Regel auch die **verkehrte Regel von Dreien**, welche man aber in die ordentliche verwandelt: wenn man die Fragzahl vorne hinsetzet. Z. B.

4 — 8 — 12 — 24

8mal

96 | 4

| 24

welches

welches nun so heist: um wie vielmal 4 kleiner ist, als 8: um so vielmal muß 12 kleiner sein als die unbekannte. Man kann auch so sprechen: wie viel Zeit brauchen 4 Mann: wenn 8 Mann 12 Wochen brauchen?

130 §. Woran kann man aber sehen, daß die verkehrte Regel anzuwenden sei? — Man betrachte die Fragzahl, und vergleiche damit die unbekannte. Wird die unbekannte desto grösser, je kleiner die Fragzahl ist; oder: wird die unbekannte desto kleiner, je grösser die Fragzahl ist: so muß man die verkehrte Regel anwenden. Wo aber diese verkehrte Ordnung statt hat, lehren folgende Umstände. Wenn wenig Arbeiter viel arbeiten sollen; so müssen sie viel Zeit haben. Wenn ein Acker sehr lang ist: so braucht er nicht sehr breit zu sein um einen Morgen auszumachen. Das Tuch zu einem Kleide ist breit: man brauchet allso weniger davon in der Länge. Die Frucht, wovon der Preis gering ist, gibt ein groses Brod: wenn ein Brod immer eben viel kosten soll. Wenn die Breite einer Klafter gros ist: so ist ihre Höhe desto kleiner. Je feiner das Silber, desto grösser ist der Werth desselbigen Stückes, und desto weniger brauchet man am Gewichte. Wenn man eine Summe Geldes abtragen

soll:

soll: so muß man viele Stücke dazu haben, wenn die Geldart klein ist. Ein klein Kapital muß lang liegen; wenn es viel eintragen soll. Einige Aufgaben werden diese Wahrheiten bestättigen.

131 §. Aufgaben zur Uebung.

1) Zu einem Kleide brauchet man 7 Elen Tuch, das 11 Viertel breit ist. Das Futtertuch ist $\frac{1}{2}$ V. breit; wie viel muß man davon nehmen? Ant. $38\frac{1}{2}$ Elen.

2) Zu einem Zimmer kommen 23 Stück Tapeten, davon jedes 2 Elen breit ist. Das Stück soll nur $1\frac{1}{2}$ Elen breit sein: wie viel Stücke muß man haben? Ant. 32.

3) Das Pfund Garn gibt 3 Elen Tuch, und es ist $1\frac{1}{2}$ Elen breit. Man hat 60 Pfunde, und das Tuch soll $2\frac{1}{2}$ Elen breit werden: wie viel Elen wird man bekommen? Antw. 108.

4) Die Frucht gilt 6 fl., und der Weck ist 20 Lothe schwer; wie schwer ist der Weck: wenn die Frucht 8 fl. kostet? Antw. 15 Lothe.

5) Ein Weber machet 40 Elen Tuch, das $\frac{9}{4}$ breit ist; wie viel wird es geben: wenn das Tuch 2 Elen breit werden soll? Antw. 45 Elen.

6)

6) Paul hat 6000 fl. auf Zins; nach 4 Jahren gibt er sie wieder, und statt des Zinses gibt er 8000 fl. zu benutzen; wie lang darf das letzte Kapital dafür stehen? Antw. 3 Jahre.

7) Die Waldklafter hält 64 Vierecksschuhe, und die Bachklafter nur 49; wie viel Bachklafter werden aus 1000 Waldklaftern gemachet? Antw. 1306 $\frac{6}{49}$. Die gemeine Regel läßt sich auch anwenden: 1 Waldkl. gibt $\frac{64}{49}$ Bachklafter; wie viel 1000?

8) 10 Mark 9 löthig Silber werden 12 löthig gemachet; wie viel Mark Silber sind es noch? Antw. 7 $\frac{1}{2}$.

9) Für 8 Stück Vieh dauert das Futter 6 Monate. Es kommen noch 2 Stück dazu; wie lang wird es nun dauern? Antw. 4 $\frac{4}{5}$ Monat.

XII Hauptstück.

Die Gesellschaftsregel.

132 §. Es ergeben sich Fälle, daß man mehrere unbekannte Zahlen suchet, deren Summe schon bekannt ist. Z. B. Zween Spieler A und B gewinnen zusammen 300 fl. A hat 30 fl. und B 40 fl. eingesetzet; wie viel gewinnet jeder besonders? Hier sind zwo Fragen, nämlich: wie viel ge-

gewinnen 30 fl.; und wie viel 40 fl., welche aus einerlei bekannten Zahlen beantwortet werden müssen. Der bekannte Gewinn ist 300 fl., welcher mit 30 und 40 fl. erworben worden ist. Also haben 70 fl., als die Summe von 30 und 40, einen Gewinn von 300 fl. eingebracht. Nun gibt sich der Aufsatz selbst:

70 fl. gewinnen 300 fl.; wie viel gewinnen 30 fl.? Antw. 128 $\frac{4}{7}$ fl.

70 fl. gewinnen 300 fl.; wie viel gewinnen 40 fl.? Antw. 171 $\frac{3}{7}$ fl.

Dieses Verfahren nennet man die Gesellschaftsrechnung; weil man sie brauchet, wenn viele mit einander etwas gewinnen oder verlieren, und der Gewinn oder Verlust eines jeden gesuchet wird. Ueberhaupt ist diese Regel anzuwenden, wo man aus dem Werthe des Ganzen den Werth eines jeden Theiles bestimmen muß. Die Regel dazu ist folgende: Man sammle die Theile in eine Summe: so hat man die erste Zahl. Der Gewinn oder Verlust ist die zweite. Ein Theil gibt die Fragzahl für die ordentliche Regel von Dreien ab. So viel Theile da sind: so viel unbekannte gibt es, und so vielmal muß man die Regel von Dreien aufs neue ansetzen. Im kurz vorhergehenden Beispiele sieht man dieses alles. Die Regel von

Dreien

Dreien wird zweimal darin angebracht; weil man auch den Gewinn von Zweien suchet. Der ganze Unterschied dabei ist, daß jeder Aufsatz eine besondere Fragzahl hat; indem sie sich in den 2 ersten Zahlen ganz gleichen.

133 §. Unterdessen ist diese Regel so nothwendig nicht, daß man nicht auch einen andern Weg nehmen dörfe, welcher ein einziger Aufsatz sein kann: wenn man suchet, wie viel 1 Gulden gewinnet, woraus sich hernach der Gewinn eines jeden durch die blose Vervielfältigung bestimmen läßt. Zum Beispiele wollen wir die erste Aufgabe nehmen.

70fl.gew.300fl.; wie viel gew. 1 fl. Ant. $4\frac{2}{7}$ fl. Man vervielfältige nun 30 und 40 mit $4\frac{2}{7}$: so wird man für den ersten $128\frac{4}{7}$, und für den zweiten $171\frac{3}{7}$ bekommen, wie zuvor, welches zusammen 300 fl. ausmachet. Denn weiß man den Gewinn von einem Gulden: so wird dieser Gewinn so vielmal genommen, als ein Gulden da ist.

134 §. Es sind zuweilen die Theile in der Zeit verschieden, in welchem Falle es nothwendig ist, alles auf eine Zeit zu bringen. Man bringt aber alle Theile auf eine Zeit: wenn man jeden Theil mit seiner Zeit vervielfältiget, und den Inhalt für einen neuen Theil gelten läßt. Z. B. ein Kaufmann

hat

hat sein Geld in verschiedenen Handlungen, und verliert dabei 460 fl. An einem Orte stehen 400 fl. 5 Monate lang; am zweiten 700 fl. 3 Monate lang; am dritten 600 fl. 4 Monate lang. Nun fragt es sich, wie viel er in jeder Handlung besonders verloren habe? setzet die Zahlen, wie folget:

Zeit	
400. 5	2000
700. 3	2100
600. 4	2400
	6500

6500 verl. 460 wie viel 2000? Ant. $141\frac{7}{13}$
2100? — $148\frac{8}{13}$
2400? — $169\frac{11}{13}$

6560 — 460

135 §. Hier muß man sich nicht wundern, daß 2000 fl. für 400, die 5 Monate gestanden haben, gelten sollen. Denn 400 fl. machen in 5 Monaten 2000 fl.; weil man in jedem Monate 400 fl. hat. Nun sind aber 5 Monate da: so müssen auch 5mal 400 fl. oder 2000 fl. da sein. Nebst den Proben, welche bei der ordentlichen Regel von Dreien vorkommen (114. 125 §), hat man hier eine besondere und leichte, die darin besteht, daß man die gefundenen Theile zusammenzählet. Ist die Summe davon der gegebenen Summe gleich: so kann man

schon

schon auf die Richtigkeit der Arbeit schliesen. Z. B. Die gefundenen Theile machen zusammen 460 fl.; der ganze Verlust war auch die Summe von 460 fl.

136 §. Die Abkürzungen lassen sich auch hier wohl anwenden. Z. B.

2000	oder	20				
2100		21				
2400		24				
		65	—	460	—	20
		:5		:5		21
		13		92		24

Von jedem Einsatze schneidet man 2 Nullen ab. Darauf wird 65 und 460 durch 5 auf 13 und 92 gebracht.

137 §. Aufgaben zur Uebung.

1) Drei gewinnen 600 Gulden: A hat 4, B 5, und C 6 fl. eingesetzet; wie viel gewinnt jeder? Antw. A 160, B 200, und C 240.

6) Zween Kaufleute schiesen 8000 Thaler zusammen. A gibt 3000, und B 5000. Bei dem Handel verlieren sie 10 von 100: wie viel verliert jeder? Ant. A 300 und B 500. Zuvor muß man den ganzen Verlust aufsuchen, als: bei 100 ist 10 verloren worden; wie viel bei 8000? Antw. 800.

3) Ein Kaufmann hat sein Geld verschiedentlich angelegt. 300 fl. hat er 8 Monate; 200 fl. 5 Monate; 120 fl. 4 Monate im Handel. In allem gewinnt er 500 fl.; was hat er bei jeder Handlung besonders gewonnen? Antw. bei der ersten 309 $\frac{27}{97}$ fl., bei der zweiten 128 $\frac{84}{97}$ fl., bei der dritten 61 $\frac{83}{97}$ fl.

4) A, B, C bringen 700 fl. zusammen. A hat 2 Theile, B 3, und C 4 Theile daran; wie viel hat jeder dazu gebracht? Antw. A 1555 $\frac{5}{9}$, B 2333 $\frac{3}{9}$, C 3111 $\frac{1}{9}$.

5) Zu 25 ℔ Salpeter nimmt man 6 ℔ Kolen, und 4 ℔ Schwefel um Schiespulver zu machen; wie viel muß man von jedem nehmen, um 40 Zentner Pulver zu machen? Antw. 20 Zent. 83 $\frac{1}{3}$ ℔ Salpeter, 5 Zent. Kolen, 4 Zentner 16 $\frac{2}{3}$ ℔ Schwefel; jeden Zentner zu 100 ℔ gerechnet.

6) Etliche Malter Korn und Spelz kosten 80 fl. das Malter Korn 6 fl. und das Malter Spelz 4 fl.; für wie viel Gulden Korn und Spelz war darunter? Antw. für 48 fl. Korn, und für 32 fl. Spelz.

7) A und B gewinnen 300 Thaler. A gewinnt 130 fl. und hat 6 fl. eingesetzet; B gewinnt 120 fl.; wie viel hat B eingesetzet? Antw. 4 Thaler.

8)

8) Ihrer Drei haben 642 fl. folgender Gestalt zu theilen: wenn A 6 fl. bekömmt: so soll B 3 haben; und wenn B 4 bekömmt: soll C 5 ziehen; was bekömmt jeder? Antw. A 302 $\frac{2}{17}$; B 151 $\frac{1}{17}$, C 188 $\frac{14}{17}$. Vor allen Dingen muß man ausmachen, wie viel C bekomme, wenn A 6 bekömmt, welches sich aus B also bestimmen läßt: wenn B 4 bekömmt: zieht C 5; wie viel zieht C, wenn B 3 bekömmt? Antw. 3 $\frac{3}{4}$. Nun gehen 6, 3, 3 $\frac{3}{4}$ in einer Ordnung fort, und dadurch wird die Aufgabe aufgelöset. Man hätte auch 6 nach 4 und 5 einrichten können.

9) Einer will sein Vermögen unter seine 3 Erben solcher Gestalt vertheilet wissen, daß A $\frac{1}{2}$ seines Vermögens, B $\frac{1}{3}$ und C $\frac{1}{4}$ bekomme. Die Verlassenschaft ist von 5200 fl. wie viel wird jeder davon bekommen? Antw. A 24000; B 16000, C 12000. Der Aufsatz heist: wenn das Vermögen $\frac{13}{12}$, als die Summe von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$, wäre: so sollte A davon $\frac{1}{2}$, oder $\frac{6}{12}$ bekommen. Nun ist aber das Vermögen 52000 fl; wie viel wird A bekommen? u. s. w.

10) Es werden 12000 fl. allso vertheilet: wenn A $\frac{2}{3}$ bekömmt, soll B $\frac{1}{3}$ bekommen. Bekömmt aber A $\frac{2}{3}$: so soll B $\frac{1}{3}$ bekommen; wie viel bekömmt jeder? Antw. A 6857 $\frac{1}{7}$, B 3428 $\frac{4}{7}$, C 1714 $\frac{2}{7}$.

11) Ein Schuldner hat nur 600 fl; an A hat er 900 zu bezahlen und an B 1000; wie viel wird jeder von den 600 fl. bekommen? Antw. A $266\frac{2}{3}$. B $333\frac{1}{3}$.

12) 2 Männer, 4 Weiber, und 100 Kinder haben 2480 fl. zu theilen. Davon soll ein Mann noch einmal so viel bekommen, als eine Frau, und eine Frau 3mal so viel, als ein Kind; wie viel wird ein jeder bekommen? Antw. Ein Mann 120 fl., eine Frau 60, ein Kind 20. Ehe man zur Auflösung schreitet, muß man zuvor die Ordnung bestimmen, wie das Geld getheilet werden soll. Das Kind, welches am wenigsten bekömmt, soll 1 haben: alsdann wird der Antheil des Weibes 3, und des Mannes 6 sein. Nun werden 6 mit 2, 3 mit 4, und 1 mit 100 vervielfältiget, um zu wissen, was alle diese Personen bekommen, wornach die Ausrechnung gemacht wird.

13) Zween Taglöhner arbeiten 120 Tage, der erste verdienet täglich 20, der zweite 24 kr. Beide haben eben viel verdienet; wie lang hat jeder gearbeitet? Antw. der erste $65\frac{5}{11}$ Tage, und der zweite $54\frac{6}{11}$ Tage. Zuvor muß man suchen, in wie viel Zeit der erste so viel gewinnt, als der zweite in einem Tage, nämlich: 20 gewinnet er in 1 Tage; wann 24? Ant. In $1\frac{1}{5}$ Tage gewinnt er so viel,

als

als der zweite in einem Tage, nämlich 24 kr. Nun spricht man: an $2\frac{1}{5}$ Tage, in welchen beide gleich viel gewinnen, hat der zweite 1; wie viel an 120 Tagen? u. s. w.

14) 11 Kinder, Söhne und Töchter, haben 3600 fl. zu theilen. Ein Sohn bekömmt 360, und eine Tochter 300 fl. Bei der Theilung bekommen alle Töchter so viel, als alle Söhne; wie viel Töchter und Söhne waren es? Antw. 5 Söhne und 6 Töchter. Weil die Söhne so viel bekommen haben, als die Töchter: so suchet man, für wie viel Töchter ein Sohnstheil von 360 fl. ist, als: 300 ist ein Tochtertheil, oder für eine Tochter; wie viel 360? Ant. $1\frac{1}{5}$ Tochtertheil. Bekommen nun Söhne und Töchter eben viel, nämlich 360 fl.: so gibt es $2\frac{1}{5}$ Kinder oder Kindertheile; darunter ist 1 Sohn oder Sohnstheil; wie viel Söhne sind unter 11 Kindern? u. s. w.

15) Ein Arbeiter verdienet täglich 20 Kreuzer und die Kost; arbeitet er nicht: so bezahlet er 12 kr. für die Kost. Am Ende des Jahrs bezahlet er nichts, und bekömmt auch nichts; wie viel Tage hat er gearbeitet, und gefeiert? Antw. $136\frac{7}{8}$ hat er gearbeitet, und $228\frac{1}{8}$ gefeiert. Erstlich spricht man: 12 kr. bezahlet er in 1 Tage; in wie viel Tagen 20 kr.? Antw. in $1\frac{2}{3}$ Tage bezahlt er

so viel, als er in einem Tage gewinnet. Sind es nun $2\frac{2}{3}$ Tage: so ist 1 Feiertag darunter; wie viel Feiertage sind in 365 Tagen.

16) Ihrer Drei erben 18000 fl., davon bekömmt der Zweite zweimal so viel, als der Erste; und der Dritte 3mal so viel als der Zweite; wie viel hat jeder bekommen? Antw. der Erste 2000, und der Zweite 4000, und der Dritte 12000. Man gebe dem Ersten 1: so wird der Zweite 2, und der Dritte 6 bekommen, welches zusammen 9 gibt. Nun heist es: wenn 9 Theile geerbet werden: so bekömmt der Erste 1 davon; wie viel bekömmt er, wenn 18000 zu theilen ist?

17) Ihrer Drei haben 96 fl. gewonnen. Davon gebüren dem Zweiten 2 fl. mehr, als dem Ersten; der Dritte bekömmt so viel, als die beiden Ersten, und noch 4 fl. dazu; wie viel bekömmt jeder? Antw. Der Erste 22 fl.; der Zweite 24, und der Dritte 50. Wenn 2 und 6 fl., welche der Zweite und Dritte mehr bekommen, zuvor von 96 fl. abgezogen werden: so wird die Auflösung nach der vorigen Aufgabe gefunden.

18) Es hat jemand 100880 zu 5 vom Hundert ausstehen. Der jährliche Zins dieses Kapitals reicht nicht hin, einen gewissen Aufwand zu bestreiten. Er muß deßwegen von dem Kapitale etwas zu dem Zinse nehmen.

Weil

Weil nun der Aufwand ein Jahr, wie das andere ist: so entsteht die Frage, wie viel er jährlich von dem Kapitale nehmen darf, damit es in 3 Jahren aufgezehret werde, und wie stark sein jährlicher Aufwand sei? Antw. Im ersten Jahre muß er 32000, im zweiten 33600, und im dritten 35280 nehmen. Der jährliche Aufwand ist 37044 fl. Um diese Aufgabe aufzulösen, suche man ein Kapital von einem beliebigen Zinse, der leicht theilbar ist. Z. B. Zu einem gewissen Zinse müßte man noch 400 Gulden vom Kapitale im ersten Jahre nehmen. Dieses Kapital wäre allso im zweiten Jahre um 400 fl. kleiner; folglich bekäme man auch nicht den Zins von diesen 400 fl., welcher 20 fl. ausmachet. Allso wäre auch der Zins vom zweiten Jahre um 20 fl. schwächer. Weil aber in jedem Jahre ebenviel aufgeht: so muß man im zweiten Jahre vom Kapitale 20 fl. mehr nehmen, nämlich 420 fl. Da nun im dritten Jahre am Kapitale 420 fl. abgehen: so geht auch der Zins von 420 hinweg, welcher 21 fl. machet. Man muß allso 21 fl. mehr vom Kapitale nehmen, als man im zweiten Jahre genommen hat, nämlich 441 fl., und alsdann soll das ganze Kapital verzehret sein. Folglich werden 400, 420, und 441 = 1261 dieses Kapital, und der jährliche Aufwand $463\frac{1}{2}$.

 sein.

sein. Durch diese Zahlen findet sich die Auflösung der Aufgabe, nämlich:

Wenn 1261 das Kapital ist: so muß man im ersten Jahre 400 nehmen. Wenn aber 100880 das Kapital ist: wie viel muß man dann nehmen? Antw. 32000. Auf gleiche Art wird für das zweite Jahr 33600, und für das dritte 35280 gefunden. Die Probe ist folgende:

	Kapit.	Zins davon,	Zusatz,	jährl. Aufw.
1 Jahr	100880,	5044 +	32000 =	37044.
2 Jahr	68880,	3444 +	33600 =	37044.
3 Jahr	35280,	1764 +	35280 =	37044.

19) Es hat jemand ein Gut, das jährlich 37044 fl. Einkünfte bringt, welches er gegen ein Kapital 3 Jahre lang versetzen will, damit der Leiher, statt des Zinses und Kapitales, die Einkünfte des Gutes geniese, und nach Verflusse von 3 Jahren das Gut wieder frei zurückgebe; wie gros muß das Kapital sein? Antw. 100880 fl. Die 3jährigen Einkünfte des Gutes müssen das Kapital und seinen Zins ersetzen. Deßwegen ist in 37044 der Zins und Zusatz vom Kapitale, so viel nämlich über den Zins bezahlet wird. Aus der vorigen Aufgabe nehme man das Kapital 1261, welches in 3 Jahren aufgeht, wenn man jährlich etwas vom Kapitale zum Zinse

nimmt,

nimmt, um den jährl. Aufwand von $463\frac{1}{20}$ fl. zu bestreiten. Nun spricht man: wenn ein solcher Aufwand $463\frac{1}{20}$ ist: so ist 1261 das Kapital dazu. Der Aufwand soll aber 37044 sein; wie gros ist das Kapital dazu?

XIII Hauptstück.

Die Vermischungsregel.

138 §. Die Berechnung der vermischten Dinge, wenn sie in dem Werthe steigen oder abnehmen, nachdem die Mischung gros oder klein ist, gehöret zu der Gesellschafsregel. Werden aber die Dinge dergestalt gemischet, daß sie ihren besondern Werth in einen gemeinschaftlichen mittlern Werth verwandeln, der eben so viel heraus bringt, als wenn man jedes besonders nach seinem Preise verkaufet hätte: so ist neben der Gesellschaftsregel noch eine andere, als eine Vorbereitung nothwendig, welche die **Vermischungsregel** (Alligationsregel) genennet wird. Z. B. ein Weinhändler hat in seinem Keller Weine von zweierlei Werthe. Das Fuder von A kostet 120 Gulden, und das Fuder von B 200 Gulden. Von diesen beiden Weinen will er 80 Fuder, jedes für 150 Gulden verkaufen, und daraus eben so viel lösen, als wenn er jedes Fuder um den ersten Preis verkaufet hätte; wie viel

Fuder muß er von A, und wie viel von B nehmen? Um dieses zu finden, setzet man die Preise der Weine untereinander, und den Mittelpreis linker Hand daneben. Zur Rechten schreibt man den Unterschied des eigenen und Mittelpreises. Aus beiden Unterschieden, und der Zahl 1 wird die Regel von Dreien aufgesetzet, worin 1 die mittlere Zahl ist. Wenn in dem Aufsatze der Unterschied des Werthes von A die erste Zahl ist: so findet man dadurch, wie viel man von dem Weine A zu einem Fuder von dem Weine B nehmen müsse. Im Gegentheile wird gefunden, wie viel man zu einem Fuder vom Weine B nehmen müsse: wenn der Unterschied des Werths von B die erste Zahl ist. Die gefundenen Theile werden zusammengezählet, und helfen nach der Gesellschaftsregel bestimmen, wie viel zu 80 Fudern gehöre.

	Preise	Unterschiede	Fuder
Mittelpreis	120	+ 30	$1\frac{2}{3}$
150			
	200	— 50	1

30 -- 1 -- 50 ? Ant. $1\frac{2}{3}$

Z. B. der Unterschied von 120 und 150 ist 30. Der Unterschied von 200 und 150 ist 50. Die Regel von Dreien ist: 30 -- 1 -- 50 bringt $1\frac{2}{3}$ Fuder von A heraus, die man mit 1 Fuder vermischen kann,

um ein Fuder in das andere für 150 Gulden verkaufen zu können. Hat nun das Gemisch von $1\frac{2}{3}$ Fuder, und von 1 Fuder den Mittelpreis 150: so läßt sich aus der Gesellschafsregel finden, wie viel von A zu 80 Fudern gehöre, wenn zu $2\frac{2}{3}$ ($1\frac{2}{3}$ und 1) $1\frac{2}{3}$ von A kömmt, wodurch 50 von A und 30 von B gefunden werden.

139 §. Dieses Verfahren ist eben so leicht, als gründlich. Indem man den Unterschied zwischen dem Mittelpreise, und dem eigenen suchet: so findet man, wie viel gewonnen oder verloren werde: wenn man jede Art nach dem Mittelpreise besonders verkaufet. Z. B. der Unterschied zwischen 120, und 150 ist 30, welcher nichts anders bedeutet, als das man bei einem Fuder A 30 fl. gewinnen würde: wenn man das Fuder davon um 150 fl. hergäbe. Hingegen bedeutet der Unterschied 50 zwischen 200 und 150, daß man an einem Fuder B 50 fl. verlieren würde: wenn man es für 150 Gulden verkaufete. Der Gewinn ist mit + und der Verlust mit — angezeiget worden, damit beides im ersten Anblicke in die Augen falle. Weil aber nichts gewonnen, noch verloren werden soll: so muß der Gewinn des einen den Verlust des andern ersetzen. Es wird aber der Gewinn des einen durch den Verlust des andern ersetzet: wenn man an einem

so

so viel gewinnet, als man an dem andern verliert, welches man durch diesen Aufsatz findet: 30 fl. gewinnet man an 1 Fuder A; man soll aber 50 fl. gewinnen (weil man an einem Fuder B so viel verliert); woran wird dieses geschehen? Antw. an $1\frac{2}{3}$ Fuder von A. Denn $1\frac{2}{3}$, oder $\frac{5}{3}$ Fuder von A zu 150 fl. machet 250 fl., und so viel Fuder zu 120 fl. gibt 200 fl; folglich werden bei diesem Handel an $1\frac{2}{3}$ Fuder von A 50 fl. gewonnen: da an einem Fuder von B 50 fl. verloren gehen, wodurch Gewinn und Verlust ersetzet wird.

140 §. Verwechselt man die Unterschiede: so bestimmet jeder, wie viel man von jedem Weine nehmen müsse. Z. B.

	120	50	der Unterschied von 120
150			und 150 steht neben
	200	30	200; der Unterschied

von 200 und 150 steht neben 120. Dieser zeiget, daß man vom zweiten 30 nehmen müsse; und jener zeiget, daß vom ersten 50 genommen werden, um den Verlust des einen durch den Gewinn des andern zu ersetzen. Daraus wird nach der Gesellschaftsregel bestimmet, wie viel von jedem auf 80 Fuder genommen werden, welche Arbeit hier ersparet wird: da 50 und 30 schon 80 ausmachen. Warum gibt aber diese Verwechselung die Anzahl der Fuder von jeder Art?

Man

Man könnte von jeder Art 30 Fuder nehmen: wenn der Unterschied von beiden 30 wäre; weil alsdann Gewinn und Verlust gleich gros ausfiele. Da aber bei B 20 mehr verloren gehen: so nimmt man so viel weniger von B, und so viel mehr von A, nämlich 50 von A, und 30 von B, wodurch Gewinn und Verlust beiderseits gleich gros wird.

141 §. Wenn von den vermischten Dingen eines keinen Werth hat: so ist eine Regel von Dreien zureichend. Z. B. es soll Wein, wovon die Maas für 24 Kreuzer verzapfet wird, mit Wasser vermischet werden, damit eine Maas ohne Schaden für 16 Kreuzer verkaufet werden könne; wie viel muß man von jedem zu einer Maas nehmen? Da das Wasser nichts kostet: so wird nur der Wein bezahlet, welcher in dem Gemischten ist. Wie viel davon zu nehmen sei, findet sich dergestalt: um 24 kr. bekömmt man 1 Maas; wie viel um 16 kr.? Antw. $\frac{2}{3}$ Maas Wein, folglich $\frac{1}{3}$ Maas Wasser.

142 §. Sollen mehr als zwei Dinge miteinander vermischet werden: so verfährt man eben so, wie bei zweien. Den Gewinn und Verlust zählt man zusammen: und ersetzet die Summe des einen durch die Summe des andern. Z. B. ein Bauer will das

Malter

Malter Korn um 6 fl.; Spelz um 4 fl. und Spelzenkerne um 8 fl. verkaufen. Niemand will diese Früchte so theuer einkaufen. Er bietet aber ein Malter in das andere um 5 fl. an, und verkaufet davon 60 Malter. Bei diesem Handel erwirbt er eben so viel, als hätte er jede Frucht um ihren obigen Preis verkaufet; wie viel war von jeder Gattung in 60 Maltern? Setzet und bemerket die Unterschiede, wie oben. 3 und 1 geben den Verlust, und 1 gibt den Gewinn. Der Verlust ist allso gröser als der Gewinn.

	4	+ 1		4
5	6	— 1	4	1
	8	— 3		1

Man verwechsele diese Zahlen: so werden von Spelz 4 Malter, vom Korne 1, und von Spelzenkernen auch 1 Malter genommen. Nun gehe man weiter: wenn 4 + 1 + 1 = 6 die Anzahl Malter ist: so sind 4 Malter Spelz darunter; wie viel sind dann in 60 Maltern? Antw. 40 Malter Spelz, 10 Malter Korn, und 10 Malter Spelzenkerne. 60 Malter zu 5 fl. machen 300 fl.; 40 Malter zu 4 fl. geben 160 fl.; 10 Malter zu 6 fl. geben 60 fl. und 10 Malter zu 8 bringen 80 fl., welches zusammen nämlich 160 + 60 + 80 = 300 fl. erträgt, wie die 30 Malter, jedes zu 5 fl.

143 §. Alle diese Fragen kann man umwenden, und nach dieser Regel auflösen.

Z. B.

Z. B. ein Weinhändler hat in seinem Keller 80 Fuder Wein, die er für 12000 fl. schätzet. Es sind aber zweierlei Weine A und B; das Fuder von A ist 120 fl.; und das Fuder von B ist 200 fl. werth (138 §). Nun fragt es sich: wie viel Fuder von jedem im Keller liegen?

1) Suchet man, wie viel das Fuder gebe: wenn eins in das andere gerechnet wird. 80 — 12000 — 1? Antw. 150 fl. welches der Mittelpreis zwischen A und B ist. Jetzt setzet man die Mischungsregel an:

	120	+ 30	50 von A
150			
	200	— 50	30 von B

Es sind allso 50 Fuder von A, und 30 Fuder von B darin, die zusammen 12000 fl. werth sind, weil 50 von A 6000 fl., und 30 von B auch 6000 fl. werth sind.

Ein Bauer hat 60 Malter Frucht um 300 fl. verkaufet, darunter war Korn, das Malter zu 6 fl.; Spelz das Malter zu 4 fl. und Spelzenkerne, das Malter zu 8 fl.: wie viel war nun von jeder Gattung Frucht bei 60 Maltern (142 §)?

1) Suchet man, wie viel ein Malter werth ist: wenn eines in das andere gerech-

rechnet wird. 60 — 300 — 1 ? Antwort 5 fl.

2) Setzet die Vermischungsregel an:

	4	+ 1		4 Spelz.
5	6	— 1	4	1 Korn.
	8	— 3		1 Spelzenkerne.

3) Die Summe dieser Malter machet nur 6 aus; darum suchet man durch die Gesellschaftsregel, wie viel in 60 zu finden:

in	6 — 4 — 60 ?	Antw.	40 Spelz.
	6 — 1 — 60 ?		10 Korn.
	6 — 1 — 60 ?		10 Spelzenkerne.
		zusammen	60 Malter.

144 §. Aufgaben.

1) Aus 12 und 15 löthigem Silber sollen 24 Mark 13 löthig gemachet werden; wie viel muß man von jedem nehmen? Antwort: vom erstern 16 Mark, und vom zweitern 8 Mark.

2) Ein Pfund Zucker kostet 26 Kreuzer; ein anderes 18 Kreuzer. Man soll diesen Zucker dergestalt vermischen, daß ein Pfund davon nur 20 Kreuzer koste; wie viel muß man von jedem nehmen? Antw. $\frac{3}{4}$ Pfund vom zweiten, und $\frac{1}{4}$ vom ersten.

3)

3) Archimedes sollte untersuchen, ob eine göldene Krone von 18 Pfunden keinen Zusatz von Silber bekommen hätte. Zu diesem Ende henkte er 18 Pf. Gold in das Wasser, und bemerkete, daß 1 Pfund daran abging; weil das Wasser so viel vom Golde trug. 18 Pfund Silber wogen $1\frac{1}{2}$ Pf. weniger; und die Krone $1\frac{1}{3}$ Pfund. Archimedes glaubte daraus die Vermischung zu entdecken. $1\frac{1}{3}$ Pf. war das Gewicht, welches das Gemischte wog und das Mittelgewicht ist, woraus $\frac{1}{3}$ Gold und $\frac{2}{3}$ Silber, oder 6 Pfund Gold, und 12 Pfund Silber herausgebracht wird (*).

4) Es werden um 48 Thaler 8 Stücke Schweine und Kälber gekaufet. Ein Schwein kostet 9 Thaler, und ein Kalb 3; wie viel sind von jeder Art gekaufet worden? Antw. 4 Schweine und 4 Kälber.

5) 11 Kinder, Söhne und Töchter, haben 3600 Gulden zu theilen. Ein Sohn be-

kömmt

(*) Hr. Prof. Zeiher zu Wittenberg soll mit Versuchen gezeiget haben, daß zwei Metalle, wenn sie zusammengeschmolzen werden, nicht mehr so viel Raum einnehmen, als die Summe der beiden Räume beträgt, die sie vorher einzeln einnehmen; welches diese Auflösung unrichtig machet.

kömmt 360, und eine Tochter 300 Gulden; wie viel Söhne und Töchter waren es? Antw. 5 Söhne und 6 Töchter.

XIV Hauptstück.

Die zusammengesetzte Regel von Dreien.

145 §. Es ist ein wesentlicher Umstand in der Regel von dreien, daß die Dinge, deren Gröse durch die 3 Zahlen angemerket wird, je zwei und zwei von einerlei Art sein müssen: wenn man daraus eine unbekannte herleiten will. Denn wie will man daraus, daß z. B. 4 Mann wochentlich 5 Gulden verzehren, bestimmen können; wie viel Elen zu einem Kleide nothwendig sein? Wenn nicht schon ein Ding in dem andern liegt: so kann die Gröse der unbekannten auch nicht in dem bekannten liegen. So genau werden uns aber die Dinge nicht angegeben, daß sie nicht in mehr Beschaffenheiten, als in der Gröse, verschieden sein sollen. Man fraget allso zuweilen von einem Dinge vielerlei auf einmal, wodurch man genöthiget wird, durch eine vorläufige Regel von dreien eine Verschiedenheit zu heben, um die Hauptfrage zu beantworten. Die Regel dazu nennet man die zusammengesetzte Regel von dreien. Z. B. 5 Mann verzehren in 6 Tagen 24 fl.; wie

viel

viel werden 20 Mann in 15 Tagen verzehren? Hier sind die Männer nicht allein in der Anzahl, sondern auch in der Zeit verschieden, wodurch nothwendiger Weise eine doppelte Frage, und folglich eine doppelte Auflösung entsteht. Durch die erste bringt man alles auf einerlei Zeit, nämlich: 5 Mann verzehren (in 6 Tagen) 24 fl.; wie viel verzehren 20 Mann in eben dieser Zeit? die Antwort ist: 96 fl. Nun steht noch zu beantworten, wie viel 20 Mann in 15 Tagen verzehren, welches sich findet, wenn man weiß, wie viel sie in einer andern Anzahl Tage verzehren. 20 Mann verzehren aber nach der vorigen Auflösung in 6 Tagen 96 fl.; wie viel werden eben dieselben in 15 Tagen verzehren? Antw. 240 fl.

146 §. Der Aufsatz zu dieser Regel ist von dem gewöhnlichen nicht unterschieden, auser, daß der zweite keine Mittelzahl hat; weil diese erst gefunden werden muß.

5 Mann verzehren 24 fl.; wie viel 20 Mann?
in 6 Tagen in 15 Tagen?

Man schreibt die Hauptzahlen zuerst hin; danach setzet man die Nebenzahlen darunter, wie sie zu ihren Hauptzahlen gehören, und suchet jede unbekannte besonders. Bei diesem Aufsatze hat man die Wahl anzufangen, wo man will. Z. B. man kann auch sprechen:

in 6 Tagen werden 24 Gulden (nämlich von 5 Personen) verzehret; wie viel wird in 15 Tagen von eben denselben verzehret? Antw. 60 fl. Nun macht diese gefundene Zahl 60 die Mittelzahl für die Hauptfrage aus: 5 Personen verzehren 60 fl. (nämlich in 15 Tagen); wie viel verzehren 20 in eben so viel Tagen? Antw. 140 fl., wie oben.

147 §. Bringt man alle Zahlen auf drei: so löset sich die Aufgabe viel leichter auf, welches man auf folgende Art erhält: jede Hauptzahl wird mit ihrer Zeit vervielfältiget, wodurch dieselbe auf einen Tag gebracht wird. Z. B. 30 Mann verzehren in einem Tage 24 fl.; wie viel verzehren 300 Mann in einem Tage? Antw. 240 fl. Hier ist 30 der Inhalt von 5 und 6, und 300 ist der Inhalt von 20 und 15, die in der Rechnung eben viel gelten. Denn 5 Mann verzehren in 6 Tagen so viel, als 30 in einem Tage (135 §).

148 §. Wenn die Aufgabe durch die Vervielfältigung auf 3 Zahlen gebracht wird: so ist dieselbe viel leichter. Allein welche Zahlen soll man miteinander vervielfältigen? Folgende Aufgaben können in ähnlichen Fällen zum Muster dienen. In denselben werden die Zahlen miteinander vervielfältiget, die übereinander stehen.

1)

1) 50 Zentner kosten 15 fl; wie viel 18?
20 Stunden weit zu führen 24 St.
1000 — 15 — 432? Ant. $6\frac{12}{25}$ fl.

2) 400 fl. geben 70 fl. Zins; wie viel 720?
in 5 Jahren in 3 Jahr.
2000 — 70 — 2160? 75 fl. 36 kr.

3) 9 Elen Tuch kosten 16 fl.; wie viel 12?
$1\frac{3}{4}$ breit $1\frac{1}{2}$ breit.
$\frac{63}{4}$ - - 16 - - $\frac{36}{2}$? $13\frac{2}{7}$ fl.

4) 54 Malter Fr. kosten 180 fl.; wie viel 63?
zu 9 Simmern zu 8 Srn.
486 - - 180 - - 504? $186\frac{2}{3}$ fl.

5) 5 Mark Silber kosten 117 fl.; wie viel 9 L.?
16löthig 11löth.
1280 - - 117 - - 99? $9\frac{63}{1280}$.

149 §. Fehlet eines von den Nebengliedern; so kann man die andern durch die Vervielfältigung nicht auf drei bringen, sondern die einfache Regel muß zweimal angewendet werden, wobei alsdann zu merken, daß die verkehrte Regel zuweilen nothwendig ist. Z. B. mit 180 fl. kaufet man 54 Malter Frucht zu 9 Simmern; wie viel Malter zu 8 Simmern wird man mit 340 fl. einkaufen? Antw. $114\frac{3}{4}$ Malter. Man verfährt allso: 180 fl. geben 54 Malter, wie viel 340 fl.? Antw. 102 Malter jedes zu 9 Srn. Nun setzet man:

wenn das Malter 9 Srn. hält: so bekömmt man 102 Malter; wie viel Malter zu 8 Simmern? Hier ist die verkehrte Regel; weil man mehr Malter zu 8 Simmern für einerlei Geld bekömmt, als zu 9 Simmern. Es muß allso die unbekannte grösser werden, obschon die dritte Zahl kleiner ist (130 §). Demnach ist die Antwort: 114 $\frac{3}{4}$ Malter. Der verkehrten Regel kann man auch ausweichen: wenn man die Malter in Simmern verwandelt. Z. B. um 180 fl. werden 486 Simmern (so viel machen 54 Malter zu 9 Srn.) gekaufet; wie viel um 340 fl.? Antw. 918 Simmern. Man mache jetzt 918 Simmern zu Maltern, jedes von 8 Simmern: so wird man 114 $\frac{3}{4}$ herausbringen.

150 §. Alle Aufgaben, wovon wir bisher gehandelt haben, bestunden aus 5 Zahlen, aus welcher Ursache man die Regel dazu die **Regel von fünfen** nennet. Allein diese Benennung ist nicht allgemein: denn es gibt Aufgaben, worin mehr als 5 Zahlen vorkommen, für welche die zusammengesetzte Regel doch Statt hat. Z. B. ein Balken, der 10 Schuh lang, 3 breit, 2 dick ist, kostet 12 fl. 6 Stunden weit zu führen; wie viel kostet ein Balken, der 9 Schuhe lang, 4 breit, 3 dick ist, 10 Stunden weit zu führen? Die Aufgabe steht so:

Balk-

	Balken	fl.	Balken		
lang	10 -	12 -	9	lang	Ant. 36 fl.
breit	3		4	breit	
dick	2		3	dick	
Stunden	6		10	Stunden.	

360 - 12 - 1080? Antw. 36 fl.

151 §. Hier und in den vorigen Aufgaben lassen sich die Abkürzungen gar schön vor der Vervielfältigung anwenden. Nämlich: 10 und 10 wird auf beiden Seiten gestrichen, wie auch 3 und 3. 2 und 4 werden mit 2 getheilet. 6 und 2 werden mit 2 getheilet. 6 und 12 werden mit 6 verkleinert, und bleiben nur die Zahlen 4, 9 und 2 zu vervielfältigen übrig, woraus 36 entsteht, als:

1 — — 2 — — 9
2

1 — — 2 — — 18? Antw. 36.

152 §. Eine besondere Art von einer zusammengesetzten Regel hat man an der Kettenregel, in welcher man, wie durch eine Kette von vielen aufeinander folgenden Anwendungen der gemeinen Regel endlich zu dem Verlangten kömmt. Jede Anwendung findet die unbekannte, welche zur Fragzahl des folgenden Aufsatzes wird. Z. B. man

weiß, daß 6 Liver einen französischen Thaler machen; 4 französische Thaler machen bei uns 11 Gulden; 1 Gulden hat 60 Kreuzer; nun verlangt man zu wissen, wie viel Kreuzer auf 2 Liver gehen? Zu dieser Auflösung kommen folgende Sätze:

6 Liv. geben	1 fr. Th. wie viel	2 Liv.?	$\frac{1}{3}$ fr. Th.
4 fr. Th.	11 fl.	$\frac{1}{3}$ fr. T.?	$\frac{11}{12}$ fl.
1 fl.	60 kr.	$\frac{11}{12}$ fl.?	55 kr.

Durch einen dreifachen Aufsatz hat man endlich gefunden, daß 2 Liver 55 Kreuzer ausmachen. Um aber diese Mühe zu ersparen, vervielfältiget man die Zahlen, wie sie übereinander stehen, unter sich; so wird der ganze Aufsatz in 3 Zahlen verwandelt. Z. B.

6 Liv.	1 fr. Th.	wie viel 2 Liv.
4 fr. Th.	11 fl.	
1 fl.	60 kr.	
24 —	660 —	2? Ant. 55 Kreuzer.

Wie viel werden 12000 fl. nach 3 Jahren bringen: wenn man den Zins zu 5 von 100 wieder auf Zins leget?

100 fl. geben über ein Jahr 107 fl.
oder 20 fl. geb. über 1 Jahr 21 fl.; wie viel 12000

20 fl.	21 fl.
20 fl.	21 fl.

abgek. 2 — — 9261 — 3? $13891\frac{1}{2}$

Es

Es sollen 13891½ fl. nach 8 Jahren ohne Zins bezahlet werden; wie viel müßte man geben: wenn man das Geld jetzt bezahlen sollte?

Anst. 21 fl. üb. 1 J. gibt man jetzt 20 fl. wie viel für
21 20 (13891½
21 20

abgek. 1 — 4000 — 3? Ant. 12000

153 §. Warum müssen aber die übereinander stehenden Zahlen miteinander vervielfältiget werden? Warum zählet man sie nicht zusammen, welches doch viel leichter ist? Das erste Muster soll die Ursache zeigen. Durch den ersten Aufsatz wird die Fragzahl für den zweiten gefunden (152 §); sie ist allso $\frac{1\times2}{6}$ (116 §), wozu für die unbekannte, $\frac{1\times2\times11}{6\times4}$ gefunden wird. $\frac{1\times2\times11}{6\times4}$ ist die Fragzahl im dritten Aufsatze, in welchem $\frac{1\times2\times11\times60}{6\times4\times1}$ für die unbekannte gefunden wird. Die letzte Zahl ist allso der Inhalt von allen zweiten Zahlen, und der dritten Zahl, welcher mit dem Inhalte der ersten Zahlen getheilet wird.

154 §. Bei dem Aufschreiben der Zahlen bemerke man diese Ordnung: die Fragzahl wird mit ihren angehörigen Zahlen geschrieben, wie in der gemeinen Regel, darunter schreibt man die Zahl, welche mit der mittlern Zahl gleichnamig ist; neben dieser steht dasjenige, was von ihr gesagt wird. Darauf wird die zweite aus dieser Reihe die erste in der folgenden Reihe, und was davon gesagt wird, steht daneben u. s. w. Z.B. wir wollen setzen, ein Stab koste 9 Liver, 5 Stabe machen 9 Nürenberger Elen, 7 Nürnberger Elen geben 8 Leipziger Elen, 5 Liver machen 2 fl., 3 fl. geben 2 Thaler; wie viel Thaler kosten nun 12 Leipziger Elen?

8 Leipz. El. geben	7 Nürnb. wie viel	12 Leipz. El.
9 Nürnb.	5 Stabe	
1 Stab kostet	9 Liver	
5 Liv. machen	2 fl.	
3 fl.	2 Th.	
1 — —	7 —	2? Antw. 14 Th.

155 §. Aufgaben zur Uebung.

1) Wie viel Zins geben 700 fl. in 6 Jahren; wenn 500 fl. in 4 Jahren 100 tragen? Antw. 210 fl.

2) Ein Weber machet aus 20 Pfund Garn ein Stück Tuch, das 42 Elen lang und $\frac{9}{4}$ breit ist. Er soll noch ein Stück machen, das 81 Elen lang, und $\frac{5}{4}$ breit ist: wie viel Garn muß er dazu haben? Antw. $21\frac{3}{7}$ Pfunde.

3) Wie viel werden $8\frac{1}{2}$ Loth 14 löthig Silber kosten: wenn das Loth 13 löthiges 18 Batzen kostet? Antw. 10 fl. $14\frac{10}{13}$ Batzen.

4) Eine Klafter Holz kostet 6 Gulden, wovon das Scheid 3 Schuhe lang ist; wie viel wird die Klafter kosten: wenn das Scheid $3\frac{1}{2}$ Schuh lang sein soll? Antw. 7 fl.

5) Die Waldklafter ist 8 Schuhe breit und hoch, und das Scheid Holz ist $4\frac{1}{2}$ Schuhe lang: die Bachklafter ist aber 7 Schuhe hoch und breit, und das Scheid Holz 4 Schuhe lang; wie viel Bachklaftern lassen sich aus 1000 Waldklaftern machen? Antw. $1469\frac{19}{49}$.

6) Ein Weber hat aus 29 ℔ Garn ein Stück Tuch gemachet, welches 42 Elen lang und $\frac{9}{4}$ breit ist. Es soll eines aus $21\frac{3}{7}$ ℔ gemachet werden, das $\frac{5}{4}$ breit ist; wie lang wird dieses Stück werden? Antw. 81 Elen.

7) Wie lang müssen 5400 fl. ausstehen, damit sie zu 6 von 100 eben so viel einbringen, als 3640 fl. zu 5 vom 100 in 6 Jahren einbringen? Antw. $3\frac{10}{27}$ Jahre.

156 §

156 §. Aus dem, was bisher abgehandelt worden ist, hat man gesehen, daß überall die Regel von dreien vorkömmt. Man hätte deßwegen auf die Gedanken verfallen können, daß die andern Regeln überflüssig wären. Allein, da man zuvor mit der Sache bekannt genug sein muß, ehe man sich um ihre Eigenschaften umsehen kann: so muß man die verschiedenen Regeln, als so viele Erläuterungen der Regel von dreien, ansehen.

XV Hauptstück.

Die Wurzelzahlen.

157 §. Wurzelzahlen sind diejenigen Zahlen, aus deren Vervielfältigung ein Inhalt entsteht. Z. B. 4 und 6 sind Wurzelzahlen von 24; weil dieser Inhalt aus 4 und 6 entsteht.

158 §. Eine **Würde** (Potenz) ist ein Inhalt, der aus der Vervielfältigung gleicher Wurzelzahlen entsteht; z. B. 16, welche Zahl aus 4mal 4 entspringt. Nach der Vielheit der Wurzelzahlen haben die Würden ihre Namen. Eine Wurzelzahl heist die **erste Würde**. Wenn der Inhalt aus 2 gleichen Wurzelzahlen entsteht: so ist es die **zweite Würde**. Die **dritte Würde** ist ein Inhalt aus 3 gleichen Wurzelzahlen. Beispiele davon sind: 3, 9, 27 u. s. w.

159 §. Die Würde von einer Wurzelzahl wird angemerket: wenn man, etwas oberwärts zur Rechten, eine kleine Ziffer schreibt, welche anzeiget, wie viel Wurzelzahlen miteinander vervielfältiget werden sollen. Z. B. 3^2, 3^3 u. s. w. das erstere bedeutet so viel, als 3×3; Das andere so viel, als $3 \times 3 \times 3$ u. s. w. Diese oberwärts geschriebene Zahlen nennet man **Würdezeiger**, oder **Namen der Würde**. Man kann ohne Mühe merken, daß sie zur Gemächlichkeit erfunden worden sind.

160 §. Die zweite Würde nennet man ein **Viereck**, oder eine **Vierecks zahl**. Ein Viereck ist allso der Inhalt aus 2 gleichen Wurzelzahlen. Z. B. 16 ist das Viereck von 4, welches durch 4^2 angemerket wird (159 §).

161 §. Die dritte Würde heist auch ein **Würfel**, eine **Würfelzahl**. Ein Würfel ist deßwegen der Inhalt aus 3 gleichen Wurzelzahlen. Z. B. 64 ist der Würfel von 4, welches durch 4^3 ausgedürckt wird. Es entsteht auch eine Würfelzahl; wenn die Veierckszahl mit der Wurzelzahl vervielfältiget wird; weil der Inhalt aus 3 gleichen Wurzelzahlen entsteht.

162 §. Die zweite und dritte Würde haben die obigen Namen aus der Meßkunst be-

komm-

kommen, worin das Viereck, und der Würfel gleiche Höhe, Breite, und Dicke haben. Werden nun diese Abmessungen durch Zahlen ausgedrücket: so müssen diese auch gleich sein, damit ihr Inhalt ein Viereck oder einen Würfel vorstellen könne.

163 §. Eine Zahl zum Vierecke machen heist nun nichts anders, als diese Zahl mit sich selbst vervielfältigen. Eine Zahl wird zum Würfel gemacht: wenn sie erst zum Vierecke gemacht, und dieses Viereck wieder mit der Wurzelzahl vervielfältiget wird.

164 §. Die Vierecke und Würfel der einfachen Zahlen muß man auswendig wissen, oder vor sich haben

Wurzelz.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Vierecksz	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Würfelz.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Aus diesem Verzeichnisse läßt sich folgendes anmerken. 1) Eine einfache Ziffer hat in ihrem Vierecke eine oder höchstens zwo Ziffern. 2) Eine einfache Ziffer hat in ihrem Würfel eine, zwo, oder höchstens drei Ziffern.

165 §. Die Eigenschaften der Vierecke, deren Wurzelzahl zwo Ziffern hat, kann

man

man aus ihrer Entstehung am deutlichsten sehen. Um die Betrachtung allgemeiner zu machen, wollen wir eine Wurzel von den höchsten Ziffern nehmen, z. B. 89, welches so viel ist, als 80 und 9 (4 §). Diese so zerglied=erte Zahl mache man zum Vierecke und schreibe jeden Inhalt unvermischt untereinander, wie es die Zahlordnung erfodert. Z. B.

89	
89	
81	das Viereck von 9 Einsern = 9mal 9
72	der Inh. v. 9 Eins. u. 8 Zehn. = 8mal 9
72	der Inh. v. 9 Eins. u. 8 Zehn. = 8mal 9
64	das Viereck v. 8 Zehn. od. 80 = 8mal 8
7921	das Viereck von 89 = 89mal 89.

166 §. Dieses Viereck enthält nun folgende 3 Stücke: 1) das Viereck von 9 Einsern = 81; 2) den Inhalt von 8 Zehnern und 9 Einsern zweimal, nämlich 72 und 72 = 144; 3) das Viereck von 8 Zehnern = 64.

167 §. Das Viereck der Einser fängt bei den Einsern an, und steigt nicht über 2 Ziffern (164 §). So steckt denn das Viereck von 9 in den beiden Ziffern 21. Wie kann aber dieses sein, da 81 gröser ist, als 21? In der Zusammenziehung ist die letzte Ziffer 4 aus dem zweifachen Inhalte noch in 8 geflossen, und hat 12 daraus gemachet,

wo=

wovon 1 in die folgende Stelle gekommen ist.

168 §. Der zweifache Inhalt der Zehner und Einser fängt in der Stelle der Zehner an; und hat höchstens 3 Ziffern, weßwegen er über die Stelle der Tausende nicht hinaussteigt.

169 §. Das Viereck der Zehner fängt in der Stelle der Hunderte an, und kann nur bis in die Stelle der Tausende kommen; weil es nur aus 2 Ziffern besteht. Darum hat das Viereck einer zweigliedrigen Wurzel niemal über 4 Ziffern, und nicht weniger, als 3.

170 §. Aus dieser Zergliederung kann man leicht sehen, wo man die Theile der zweigliedrigen Wurzel hernehmen solle. Zu diesem Ende theilet man das Viereck von der Rechten zur Linken durch Beistriche in Abschnitte, deren jeder aus 2 Ziffern besteht, wovon aber der letzte auch eine Ziffer haben kann: wenn das Viereck nur 3 Ziffern hat. In dem Abschnitte zur Linken ist allso das Viereck der Zehner, und zuweilen etwas von dem zweifachen Inhalte. In dem letzten Abschnitte ist etwas von dem zweifachen Inhalte, und das Viereck der Einser. Wer nun die Wurzel aus einem Vierecke von 2 Abschnitten suchen will, der schliest auch von 2 Abschnitt-

schnitten auf 2 Ziffern der Wurzel. Ueberhaupt so viel Abschnitte das Viereck hat; so viel Ziffern hat die Wurzel. Die Wurzel muß man aber im linken oder rechten Abschnitte suchen. Im rechten vermischet sich die Zehnerziffer mit dem zweifachen Inhalte, da die Zehnerziffer im linken Abschnitte einfacher und kennbarer bleibt. Man muß allso bei der Wurzelausziehung zur Linken anfangen, wie bei der Theilung.

171. § Ohne eine Zergliederung an einer jeden vielgliederigen Wurzel vorzunehmen, kann man schon aus den Eigenschaften der zweigliedrigen darauf schliesen. Es soll z. B. die Wurzel 3 Ziffern oder Glieder haben, nämlich 789, darin ist 7 ein Zehner von 8, und 8 in Absicht auf 7 der Einser davon (3 §). Folglich haben diese beiden Wurzelziffern die Eigenschaften der zweigliedrigen Wurzel. 8 ist der Zehner von 9: darum haben auch diese beiden Ziffern die vorgemeldeten Eigenschaften der zweigliederigen Wurzel, welches sich auf jede Zahl ausdehnen läßt. Was man nun bei Ausziehung einer zweizifferigen Wurzel zu beobachten hat, dieses muß man auch bei einer vielzifferigen anwenden.

172 §. Die Viereckswurzel aus jeder Zahl ziehen.

1) Die Zahl wird von der Rechten zur Linken in Abschnitte getheilet, deren jeder 2 Ziffern enthält: der letzte kann eine Ziffer haben (170 §). Zur Rechten wird ein Strich gemacht, wie bei der Theilung. Z. B.

79,21 |

2) In dem letzten Abschnitte zur Linken suchet man die Wurzel, welches durch Hilfe, des Wurzeltäfelchens geschieht. Man suchet nämlich, welches Viereck der Zahl am nächsten kömmt. Für 79 ist das Viereck 64, wovon die Wurzel 8 ist, welche neben den Strich geschrieben wird. Das Viereck von 8, nämlich 64 wird von 79 abgezogen, um zu sehen, was noch vom zweifachen Inhalte darin ist, welches 15 ist (168, 169 §). Z. B.

		Wurzel
	79,21	8
Viereck von 8	64	
	15	

3) Zu dem Uberschusse 15 wird die erste Ziffer aus dem folgenden Abschnitte gezogen, um den zweifachen Inhalt zu bekommen, (168 §), welches mit einem Tüpflein bemerket wird. Z. B.

		Wurzel
	79,21	8
Viereck von 8	64	
	152	

4)

4) Zu dem doppelten Inhalte wird der Theiler gesuchet, welcher die doppelte gefundene Wurzel von 8 ist, nämlich 16, womit 152 getheilet wird. 152 mit 16 getheilet gibt 9, welches die zweite Vierecks-wurzel ist, und zu 8 hingeschrieben wird. Hernach wird 16 mit 9 vervielfältiget, um den Inhalt 144 von 152 abzuziehen, wie in jeder Theilung gewöhnlich ist. Zu dem Ueberschusse 8 wird die zurückgelassene Ziffer 1 gesetzet, daß 81 daraus werde, wovon alsdann das Viereck von der letzten gefundenen Wurzel 9, welches 81 ist, abgezogen wird; und gar nichts mehr znrück läßt. Diese zweifache Abziehung geschieht in allen Abschnitten nach dem ersten.

		79,21	Wurzel 89
Viereck von 8 =		64	
Doppelte Wurzel 8, als Theiler	16	152	
		144 erste Abziehung.	
		81	
Das Viereck von 9 =		81 zweite Abzieh.	

Allso ist 89 die Vieredkswurzel von 7921, welches man daran sieht, indem 7921 heraus kömmt: wenn 89 mit sich vervielfältiget wird (160 §).

173 §. Daß die gefundene doppelte Wurzel der Theiler sei, folget aus den Bestandstheilen der Theilungszahl. Denn in dem 170 § ist gesagt worden, daß in dem zweiten Abschnitte der zweifache Inhalt beider Wurzelzahlen 8 und 9 stecket. Es entsteht aber der zweifache Inhalt von 8 und 9, der 144 ist: wenn das zweifache 8 mit 9, oder das einfache 8 mit dem doppelten 9 vervielfältiget wird. Ist nun eine Wurzel bekannt: so wird diese doppelt genommen, und bringt durch die Theilung die andere Wurzel heraus (40 §). Die lezte Ziffer des folgenden Abschnittes wird darum zur Theilung nicht genommen; weil der zweifache Inhalt erst in den Zehnern anfängt (168 §).

174 §. Wenn nach der ersten Abziehung so viel nicht übrig bleibt, daß auch die zweite Abziehung verrichtet werden kann: so hat man den Antheil zu gros genommen, welcher deßwegen verkleinert werden muß.

175 §. Wie eine zweigliederige Wurzel gefunden wird: so wird auch eine vielgliedrige gefunden, wie folgendes Viereck einer dreigliederigen Wurzel zeigen wird.

Das

			Wurzel
		12, 53, 16	354
Das Viereck von 3 = 9			
2fache Wurzel 3, als Theiler	9	35	
		30	erste Abziehung
		53	
Das Viereck von 5 = 25			2te Abziehung
2fache Wurzel 35, als Theiler	70	281	
		280	erste Abziehung
		16	
Das Viereck von 4 = 16			2te Abziehung

Weil hier 3 Abschnitte sind, so hat die Wurzel auch 3 Ziffern (170 §). Die 2 ersten Ziffern werden gefunden, wie in dem vorigen Muster. Um die dritte zu finden verfährt man, wie bei dem zweiten Abschnitte im vorigen Muster.

Es ist aber zu merken, daß die gefundene Wurzel 35 zweifach genommen werden müsse, welches 70 machet. Das übrige folget, wie im zweiten Muster. Wenn allso die gefundene Wurzel doppelt genommen wird: so ist dieses nicht allein von einer Ziffer zu verstehen; sondern es geht jede Anzahl Ziffern an.

176 §. Wenn der Theiler für den zweifachen Inhalt zu gros ist: so setzet man für

die Wurzel eine Nulle, wie bey der gemeinen Theilung. Z B. nachdem die Wurzel

		Wurzel	
	16, 56, 49	407	
	16,		
Theiler 8	5		

gefunden worden ist: wird 5 heruntergerücket, um mit dem zweifachen 4 = 8 getheilet zu werden. 5 ist aber kleiner als 8, darum wird für die Wurzel 0 gesezet. Danach nimmt man zu dem ganzen zweiten Abschnitte die erste Ziffer des dritten Abschnittes, und theilet mit dem zweifachen 40 = 80, um die lezte Wurzelziffer zu bekommen. Z. B.

80	56,4	
	56 0	erste Abziehung
	49	
	49	zweite Abziehung.

177 §. Aus dieser Ursache wird die Wurzelziffer eine Nulle bekommen, wenn der Abschnitt auch 2 Nullen hat. Z. B. die Wurzel von 100 ist 10.

178 §. Bei den Brüchen wird die Wurzel in dem Zähler und Nenner, wie bei einer ganzen Zahl gefunden. So ist z. B. die Wurzel von $\frac{16}{100} = \frac{4}{10}$.

179 §. Wenn bei der Wurzelausziehung noch etwas übrig bleibt, und doch kein Ab-

schnitt mehr darauf folget: so setzet man zu dem Ueberschusse 2 Nullen, und verfährt damit gewöhnlicher Maasen, welches man sich der Wurzel **nähern** heist; indem man sie niemal ohne einen Ueberschuß bekommen wird. Z. B. die Wurzelziffern 23

	5,38	$23 \frac{194}{1000}$
	4	
4	13	
	12	erste Abziehung.
	18	
	9	zweite Abziehung.

Theiler 46	900	erste Näherung
	46	erste Abziehung.
	440	
	1	2te Abzieh.
Theiler 462	43900	zweite Näherung
	4158	erste Abzieh.
	2320	
	81	2te Abzieh.
Theiler 4638	223900	dritte Näheruug
	18552	erste Abzieh.
	38380	
	16	2te Abzieh.
	38364	Ueberschuß zu weiterer Näherung.

werden nach der Ordnung gefunden, und alsdann bleibt noch 9 übrig. Nun fängt hier die Näherung an, indem man 00 dazu setzet, wovon 90 den doppelten Inhalt vorstellet. 46 als das zweifache von 23 ist der Theiler dazu, wodurch die Wurzel 1 gefunden wird. Bei dem Ueberschusse 439 fängt die zweite Näherung an, wenn man will, welchem man wieder 00 zu gibt. Aus 231 wird der Theiler gemacht, ohne auf den Bruch zusehen, und dadurch findet sich die Wurzel 9, welche mit 1, $\frac{19}{100}$ machet. Auf gleiche Art verfährt man: wenn man weiter gehen will. Daß aber die letzten Ziffern Brüche sind, kömmt daher; weil 538 zu $\frac{538000000}{1000000}$ gemacht worden ist; indem man zum Ueberschusse 3mal 00 gesetzet hat, wovon die Wurzel $\frac{23194}{1000}$ ist, und noch 38364 übrig läßt. $\frac{23194}{1000}$ ist aber eben so viel, als 23 $\frac{194}{1000}$ (48 §).

180 §. Wenn die Wurzel 23 $\frac{194}{1000}$ wieder zum Vierecke gemacht wird: so muß auch der letzte Ueberschuß 38364 dazu gezählet werden, ohne welchen man 538 nicht herstellen wird.

181 §. Die Zergliederung der Würfelzahlen soll uns nun die Natur derselben zeigen. Wir wollen den Würfel von 89 nehmen. Die Würfelzahl entsteht, wenn die

Vier-

Viereckszahl mit der Wurzel vervielfältiget wird (161 §). Das Viereck von 89 ist 7921, worin 6400, 1440, und 81 enthalten sind (166 §). Wird nun 7921 mit 89 vervielfältiget: so werden auch die Zahlen 6400, 1440, und 81 mit 89 oder 80 und 9 vervielfältiget. Das ganze Verfahren sieht so aus:

6400 = 8. 8 oder 80. 80		
1440 = 2. 8. 9, oder 80. 9		
81 = 9. 9		= 7921

Man vervielfältige alles mit 80 und 9 = 89

512000 = 80. 80 mit 80	
115200 = 2. 80. 9 mit 80	633680
6480 = 9. 9 mit 80	
57600 = 80. 80 mit 9	
12960 = 2. 80. 9 mit 9	71289
729 = 9. 9 mit 9	

704969=8.8.8+3.8.8.9+3.8.9.9+9.9.9

182 §. In dem Würfel der zweigliedrigen Wurzel 89 sind allso folgende Stücke zu bemerken. 1) Ist der Würfel vom Zehner 8, oder von 80 darin, welcher in der Stelle der Tausende anfängt, wenn man die Nullen nicht rechnet, und höchstens drei Ziffern hat (164 §), nämlich 8. 8. 8. = 512000.

2) Ist der dreifache Inhalt des Viereckes von 8, und der Wurzel 9 darin, der in der

Stelle der Hunderte anfängt, und höchstens 4 Ziffern hat, 3. 8. 8. 9, oder 2. 8. 8. 9 und 8. 8. 9 = 172800.

3) Der dreifache Inhalt aus der Wurzel 8 und dem Vierecke von 9, welcher in der Stelle der Zehner anfängt, und höchstens bis in 10 Tausend geht, 3. 8. 9. 9 oder 2. 8. 9. und 8. 9. 9 = 19440.

4) Der Würfel von 9, der in der Stelle der Einser anfängt und höchstens nur 3 Ziffern einnimmt, 9. 9. 9 = 729.

183 §. Wird nun die Würfelzahl 704969 allso abgetheilet, daß jeder Abschnitt drei Ziffern bekömmt, wovon aber doch der linke weniger haben kann: so findet man in dem ersten Abschnitte zur Linken den Würfel des Zehners, und in dem letzten den Würfel von den Einsern. Auch sieht man daraus, daß die Zahl der Abschnitte die Anzahl der Wurzelziffern bestimme, wie in dem Vierecke.

184 §. **Die Würfelwurzel von einer Zahl (z. B. von 704969) finden.**

1) Die gegebene Zahl wird von der Rechten zur Linken in Abschnitte, jeder von 3 Ziffern, zerleget; als: 704, 969 (183 §).

2) Aus dem Wurzeltäfelchen suchet man die Wurzel des höchsten Würfels, der in 704 stecket. Diese Wurzel wird neben den Strich geschrieben, und ihr Würfel von 704 abgezogen.

3)

3) Zu dem Ueberschusse, wenn einer da ist (hier ist er 129), wird noch die erste Ziffer des folgenden Abschnittes gesetzet, um den dreifachen Inhalt aus dem Vierecke der gefundenen Wurzel 8, und aus der noch unbekannten 9 beisammen zu haben, welcher erst in der Stelle der Hunderte anfängt (182 §). Diese Zahlen 1929 werden mit dem dreifachen Vierecke von der schon gefundenen Wurzel 8 getheilet: und man wird die Wurzel 9 bekommen; weil der Inhalt 3. 8. 8. 9 darin ist (182 §).

4) Nun geschehen 3 Abziehungen; weil dreierlei Zahlen in dem letzten Abschnitte sind. Die erste Abziehung geschicht wie in der Theilung; nach welcher 3. 8. 8. 9 von 1929 abgezogen wird. Zu dem Ueberschusse 201 setzet man die folgende Ziffer 6; so ist 2016 für den Inhalt = 3. 8. 9. 9, der in den Zehnern anfängt, und folgender Gestalt gemacht wird: die letzte Wurzel 9 wird zum Vierecke gemacht, und mit dem Dreifachen von 8 = 24, oder erst mit 8, hernach mit 3 vervielfältiget. Das gibt 1944, und wird von 2016 abgezogen. Nun ist noch 729 übrig, welches der Würfel von 9 sein muß. Man mache 9 zum Würfel. Dieser ist = 729, wird von 729 abgezogen und läßt nichts übrig. Dieses Verfahren soll in seinem Zusammenhange zu mehrerer Deutlichkeit hier vorgestellet werden.

Würf-

	Würfel	Wurzel
	704,969	89
Würfel von 8 =	512	
Theiler 3. 8. 8 = 192	1929	
2. 8. 8. 9 =	1728	1ter Abz.
	2016	
3. 8. 9. 9 =	1944	2ter Abz.
	729	
9. 9. 9 =	629	3ter Abz.

Ein Muster von dreien Wurzelziffern.

		Wurzel
	105, 823, 817	473
4. 4. 4 =	64	
3.4.4 Theiler 48	418	
3. 4. 4. 7 =	336	1ter Abz.
	822	
3. 4. 7. 7 =	588	2ter Abz.
	2343	
7. 7. 7 =	343	3ter Abz.
Theiler 6627	20008	
3.47.47.3 =	19881	1ter Abz.
	1271	
3. 47. 3. 3 =	1269	2ter Abz.
	27	
3. 3. 3. =	27	3ter Abz.

185 §.

185 §. Wenn bei einer richtigen Ausziehung der Wurzel noch etwas übrig bleibt, und daraus noch die Wurzel gefunden werden soll: so schreibt man zu diesem Ueberschusse drei Nullen, und zieht daraus die Wurzel, wie bei dem Vierecke. Die gefundene Wurzel davon ist aber ein Bruch, der 10 zum Nenner hat; weil der Würfel von 10 drei Nullen hat (161 §).

	13	$2\frac{2}{10}$
	8	
Theil. 12	50,00	
	24	
	260	
	24	
	2360	
	8	
	2352	Ueberschuß.

Man wird dieselbige Wurzel bekommen: wenn man die Nullen gleich von Anfange dazu setzet, nämlich: 13000, wovon $\frac{22}{10} = 2\frac{2}{10}$ die Wurzel ist; weil $13000 = \frac{13000}{1000}$.

186 §. Wenn die Wurzel zum Würfel gemacht wird: so muß dieselbige Zahl herauskommen, aus welcher man die Wurzel gezogen hat. Bei einer unvollständigen Wurzel muß man den Ueberschuß noch zu dem

In=

Inhalte der Wurzel zählen. Diese Probarten sind richtig, aber auch langweilig. Wir wollen allso zeigen, wie man diese Prüfung, so wohl bei den Vierecks- als Würfelzahlen, mit der Zahl 9 leichter anstellen könne. Aus dem 175 § ist 125316 ein Viereck, wozu die Wurzel 354 ist. Wenn 354 die ächte Wurzel ist: so muß 354 × 354 das vorige Viereck wieder herstellen (160 §). Es läßt sich allso hier die Neunerprobe von der Vervielfältigung anbringen (56 §). Nämlich: aus 125316 werden alle Neuner geworfen, und der Ueberschuß bemerket. Hier ist der Ueberschuß 0. In der Wurzel werden auch die Neuner weggeworfen, und der Ueberschuß aus der Wurzel = 0 wird mit sich vervielfältiget, und alle Neuner daraus geworfen. Er ist wieder 0, wie in dem Ueberschusse vom Vierecke. 354 ist allso die wahre Wurzel.

187 §. Die mangelhafte Wurzel von 538 ist $23\frac{194}{100}$, oder $\frac{23194}{100}$, und der Ueberschuß dazu ist 38364 (179 §). In 538 läßt 9 den Ueberschuß 7 übrig. In 23194 macht 9 den Ueberschuß 1. In dem Viersecksüberschusse 38364 ist der Ueberschuß von 9 = 6, welcher mit dem Ueberschusse 1 so gros ist, als der Ueberschuß 7 aus der mangelhaften Viereckszahl, welches alsdann ein Zeichen der Richtigkeit ist (57 §).

188 §. Bei dem Würfel muß der Neunerüberschuß in der Wurzel zum Würfel gemacht werden, und einen Ueberschuß geben, der so gros ist, als der Ueberschuß aus dem Würfel. Der Würfel 704969 hat zur Wurzel 89 (184 §). Der Neunerüberschuß ist im Würfel = 8: der in 89 ist 8. Der Würfel von dieser Zahl 8 ist = 512, worin auch 8 der Ueberschuß, und ein Zeichen der Richtigkeit ist.

189 §. Aufgaben.

1) Auf einem viereckigen Felde stehen 25 Bäume in einer Reihe; wie viel auf dem ganzen Felde? Antw. 625.

2) Man hat 7845 Bäume, die man in ein Viereck setzen will; wie viel werden in eine Reihe zu stehen kommen? Antw. 88, und alsdann bleiben noch 101 übrig.

3) Von diesen Bäumen soll in jede Reihe ein Baum mehr kommen; wie viel würden zum ganzen Vierecke noch fehlen? Antw. Noch 76 Bäume.

4) Es haben etliche Personen 7fl. 21 kr. verzehret, dazu bezahlet jede Person so viel, als ihrer sind; wie viel gibt jede, und wie viel Personen waren es? Antw. Es waren 21 Personen, und jede bezahlete 21 Kreuzer.

5) Ein viereckiges Stück Feld ist 6 Schuhe lang; ein anderes noch einmal, nämlich 12 Schuhe lang; wie vielmal ist das lezte Feld gröser? Antw. 4mal. Denn das erste hat 36 Schuhe, unddas lezte 144.

Anmerkung. Wenn eine Seite des Viereckes noch einmal gröser ist: so werden auch alle Seiten so vielmal gröser sein, als alle Seiten des andern Vierecks, welche Seiten zusammen den ganzen Umkreis ausmachen.

6) Es kaufet sich jemand ein Gebund Federn, und bestellet sich noch ein Gebund, doch so, daß die Schnur dazu noch einmal so gros sei, wie viel Federn wird er bekommen? Antw. viermal so viel; wenn sie alle gleich dick sind.

7) Eine Zirkelfläche ist mit 1000 Bäumen besezet, und hat im Umkreise 800 Schritte. Man soll eine andere Fläche mit 6000 besezen: wie gros muß der Umkreis dazu sein? Antw. Bei nahe 1959 Schritte. Aus der Meßkunst muß man hier wissen, daß die Zirckelflächen sich verhalten, wie die Vierecke ihrer Umkreise.

8) Man will ein Stück Feld, welches 12 Ruthen breit, und 108 lang ist, in ein Viereck verwandeln; wie breit oder lang

wird

wird dieses Stück werden? Antw. 36 Ruthen.

9) Ein viereckiger Kasten hält 1728 Würfelschuhe; wie hoch ist er? Antw. 12 Schuhe.

10) Von etlichen Kaufleuten leget jeder so viel zusammen, als ihrer sind. Sie gewinnen den ganzen Einsatz auch so vielmal. Der ganze Gewinnst beträgt 1331 Gulden; wie viel Kaufleute waren es? Antw. 11.

XVI Hauptstück.

Von den Staffelzahlen.

190 §. Zahlen, die in einer Reihe so fortlaufen, daß sie überall auf dieselbige Art ab- oder zunehmen, nennet man Staffelzahlen. Z. B. 1, 3, 5, 7; oder 1, 2, 4, 8, 16 u. s. w. Die Zahl, welche dieses Ab- oder Zunehmen der Staffelzahlen anzeiget, heist die Steigzahl. Diese ist in den obigen Reihen 2. Denn in der ersten derselben wird die folgende Zahl immer um 2, in der letztern immer 2mal gröser, als die vorhergehende ist. Die Steigzahl findet sich in einer Reihe Staffelzahlen entweder dadurch, daß ein Glied der Reihe von dem nächsten Gliede abgezogen, oder es durch dasselbige getheilet wird. Dieses Abziehen

hat z. B. in der erstern der oben gegebenen Reihen, das Theilen in der zweitern Statt. Dort sage ich: 1 von 3 = 2, 3 von 5 = 2 u. s. w.; hier heist es: 1 in 2 ist 2mal, 2 in 4 ist 2mal, 4 in 8 ist 2mal u. s. w.

191 §. Hieraus folget nun, daß die Reihen der Staffelzahlen sich in zwo verschiedene Gattungen theilen. Diejenige, worin die Steigzahl durch das Abziehen gefunden wird, heist eine **Unterschiedsreihe**; jene hingegen, worin man besagte Steigzahl durch das Theilen findet, wird eine **Theilungsreihe** genennet.

192 §. Eine jede dieser Reihen kann ab- oder **zunehmend** sein; nachdem die kleinste Staffelzahl zur Linken oder zur Rechten steht. Im ersten ist die Reihe zunehmend, als: 1, 3, 5, 7; oder 1, 2, 4, 8, 16 u. s. w.; im letzten abnehmend, als: 7, 6, 3, 1, oder 16, 8, 4, 2, 1. Da aber die zunehmende Reihe gebräuchlicher ist, und leicht umgewendet werden kann: so wollen wir die Natur der Reihen aus diesen erwägen, und bei der Unterschiedsreihe den Anfang machen.

193 §. Weil die Staffelzahlen in einer Reihe so fortlaufen, daß sie auf einerlei Art zunehmen: so machet sich jedes folgende Glied:

wenn

wenn man die Steigzahl zu dem vorhergehenden zählet. Z. B.

I	II	III	IV	V
1,	1+2,	3+2,	5+2,	7+2
1,	3,	5,	7,	9

Weil aber das zweite Glied aus dem ersten und der Steigzahl besteht: so ist das dritte Glied = 1+2+2 = 5, d. i. das dritte Glied hat die Summe aus zwoen Steigzahlen und dem ersten Gliede. Ein gleiches läßt sich von allen Gliedern sagen, woraus alsdann folget, daß jedes Glied eine Steigzahl mehr hat, als das vorhergehende.

194 §. Will man diese Eigenschaft der Unterschiedsreihe ausdrücken: so sieht sie so aus:

I	II	III	IV	V
1,	1+2,	1+2+2,	1+2+2+2,	1+2+2+2+2
1,	3,	5,	7,	9

195 §. Die Steigzahl fängt erst bei dem zweiten Gliede an; und jedes folgende Glied hat eine Steigzahl mehr. Deßwegen hat jedes Glied so viel Steigzahlen, als Glieder vorhergehen, oder die Anzahl der Steigzahlen für jedes Glied ist um 1 kleiner, als die Gliederzahl. Z. B. das dritte Glied hat zwo Steigzahlen, und das vierte drei u. s. w.

Nun ist man im Stande jedes Glied auser der Ordnung zu bestimmen.

196 §. **Aus dem ersten Gliede, der Steig- und Gliederzahl das letzte Glied finden.**

Man zieht von der Gliederzahl 1 ab, und vervielfältiget diesen Ueberschuß mit der Steigzahl; zu diesem Inhalte zählet man das erste Glied: so wird man das lezte bekommen (193 §). Z. B. das erste Glied sei = 2, die Steigzahl = 3, dazu verlangt man das 16te Glied. 16 weniger 1 ist 15; 15 wird mit 3 vervielfältiget, und der Inhalt 45 nimmt noch das erste Glied 2 an: so ist 47 das 16te Glied.

197 §. Obschon hier die Rede vom lezten Gliede ist: so begreift es sich doch leicht, daß diese Lehre für jedes Glied gelte. Es kostet unendlich mehr Mühe, wenn man durch alle Zwischenglieder bis auf das verlangte steigen will, wie aus dieser vollständigen Reihe erhellet.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47.

198 §. Wenn man das erste und lezte Glied, und diejenigen Glieder, welche von beiden Enden gleich weit entfernet sind, zu-

samm-

sammenzählet: so entstehen gleiche Summen. Z. B. das erste Glied 2 und das letzte Glied 47 machen 49. Das zweite Glied 5 und das 15te Glied 44 machen 49. Das 4te Glied = 11 und das 13te = 38 geben auch 49 u. s. w. Denn jede Summe enthält gleich viel erste Glieder und Steigzahlen. Die erste Summe hat das doppelte erste Glied und 15 Steigzahlen; weil das letzte Glied aus dem ersten und 15 Steigzahlen besteht (195 §). Die zweite Summe hat auch das doppelte erste Glied und 15 Steigzahlen; weil das zweite Glied aus dem ersten Gliede und einer Steigzahl; das 15te aber aus dem ersten Gliede und 14 Steigzahlen besteht.

199 §. Wenn die Gliederzahl ungerad ist: so ist das zweifache mittlere Glied so gros, als die beiden äusern. Z. B. in 7 Gliedern ist 2. 11 = 20 + 2. Aus diesen Eigenschaften kann man auch jedes Glied aus einer gewissen Anzahl Glieder finden, nämlich wenn man von der Summe des zweiten und dritten Gliedes das erste Glied abzieht: so kömmt das vierte heraus. Wenn die Gliederzahl gerad ist: so wird man halb so viel gleiche Summe bekommen, als Glieder sind. Wird nun eine einzige Summe davon mit der halben Gliederzahl vervielfältiget: so erhält man alle Summen, und folglich die Summe aller Glieder.

200 §. **Aus dem ersten und letzten Gliede, und aus der Gliederzahl die Summe aller Glieder finden.**

Die Summe des ersten und letzten Gliedes wird mit der halben Gliederzahl vervielfältiget. Z. B. aus der obigen Reihe (197 §) ist die Summe des ersten und letzten Gliedes $2+47 = 49$. Die Gliederzahl war 16: vervielfältiget 49 mit halb 16, oder mit 8: so ist der Inhalt 392 die Summe aller 16 Glieder (199 §), $\overline{2+47} \times \frac{16}{2} = 392$.

201 §. **Aus der Summe aller Glieder, der Gliederzahl, und aus dem ersten Gliede die Steigzahl finden.**

Man theilet die Summe mit der halben Gliederzahl; davon ziehet man das doppelte erste Glied ab, und theilet diesen Uberschuß mit der um 1 verkleinerten Gliederzahl: so wird die Steigzahl herauskommen. Z. B. Die Summe von den 16 Gliedern = 392 wird mit 8 getheilet, und es entsteht 49 als die Summe des ersten und letzten Gliedes (200 §). Nun ist in 49 das zweifache erste Glied, und 15 Steigzahlen (198 §). Zieht man jetzt 4 als das zweifache erste Glied von 49 ab: so bleibt 45 für 15 Steigzahlen übrig. 45 wird mit 15 getheilet, welche Zahl um 1 kleiner ist als die Gliederzahl, und daraus entsteht 3 für die gesuchte Steigzahl.

202 §. Aus der Summe aller Glieder, der Glieder- und Steigzahl das erste Glied finden.

Die Summe wird mit der halben Gliederzahl getheilet. Die Steigzahlen des letzten Gliedes werden von diesem Antheile abgezogen: so wird das zweifache erste Glied herauskommen, dessen Hälfte das erste Glied ist. Z. B. die vorige Summe = 392 wird mit 8 getheilet, und gibt zum Antheile 49 als die Summe des ersten und letzten Gliedes (200 §); darin sind 15 Steigzahlen, und das zweifache erste Glied (198 §). Werden nun diese 15 Steigzahlen, so viel nämlich das letzte Glied hat = 45 (weil 3 die gegebene Steigzahl ist) von 49 abgezogen: so ist der Ueberschuß 4, und die Hälfte davon das erste Glied.

203 §. Wendet man die Reihe (197 §) um: so ist 47 das erste Glied, und 2 das letzte. Die Glieder davon nehmen so ab, daß jedes folgende Glied eine Steigzahl weniger hat, anstatt daß es im Aufsteigen eine mehr bekam. Folglich hat jedes Glied so viel Steigzahlen weniger, als Glieder vorhergehen. Aus diesem Grunde müßte in der gemeldeten Reihe 15mal 3 von dem ersten Gliede 47 abgezogen werden, um das letzte Glied 2 zu bekommen.

204 §. Wenn die Glieder einer Staffelreihe bis auf eine gewisse Zahl steigen, und von da in eben der Ordnung bis auf das erste Glied wieder heruntersteigen: so kann man eine solche Reihe in 2 zerlegen, und ihre Summe gehöriger Maasen suchen. Wenn aber eine solche doppelte Reihe zum ersten Gliede und zur Steigzahl 1 hat: so findet sich die Summe dieser Reihe; wenn das höchste Glied mit sich selbst vervielfältiget wird. Z. B. es sei folgende Reihe: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Hier gibt 6mal 6 die Summe aller Glieder; denn diese Reihe läßt sich so zerlegen: 1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5, und 6. Die Summe beider Reihen ist $1+5 \times \frac{5}{2}$, und $1+5 \times \frac{5}{2}$, oder für beide zusammen $1+5 \times 5$, welches 6×5 machet. In dieser Summe 6×5 ist aber 5mal 6. Dazu gehöret noch das höchste Glied 6; und dann wird 6mal 6 herauskommen, wie gesaget worden ist.

205 §. Nach dieser Aufgabe läßt sich der Inhalt eines jeden Viereckes finden. Denn wird ein viereckiger Boden mit viereckigen Platten beleget, deren jede einen Schuh lang und breit ist: so kann in dem Ecke ein Stein liegen, neben diesem zween, und daneben drei, und so weiter nach dem andern Ecke zu. In der Mitte wird die gröste Reihe sein.

Die folgenden nehmen wieder bis auf 1 ab. Die mittlere Reihe ist eben so gros, als die Seite eines Viereckes.

206 §. **Aufgaben in Unterschiedsreihen.**

1) Einer verzehret in 20 Tagen 17 fl. 10 kr.; alle Tage verzehret er 5 kr. mehr, als den vorigen Tag; wie viel verzehret er den ersten Tag? Antw. 4 kr.

2) Unter 12 Arme sollen 5 fl. dergestalt vertheilet werden, daß der erste 3 kr. bekomme; wie viel muß der folgende immer mehr bekommen, damit die 5 fl. gerad aufgehen? Antw. der folgende müßte 4 mehr bekommen, als der vorhergehende.

3) Es werden für 6 Personen 80 Dukaten ausgesetzet. Der höchste Preis soll von 20 Dukaten sein, und jeder folgende um einerlei Zahl weniger bekommen; wie gros wird der geringste Preis, und die Steigzahl sein? Antw. der geringste Preis ist von 6 $\frac{2}{3}$ Dukaten, und die Steigzahl ist 2 $\frac{2}{3}$.

4) Unter 16 Arme wird Geld ausgetheilet; der nächstfolgende bekömmt immer 3 kr. mehr. Bei der Austheilung fehlet der 11te, dessen Theil der 5te zu sich nimmt, und mit seinem Theile 46 kr. mitbringt; wie viel

gebührete davon jedem? Antw. dem 5ten 14, und dem 11ten 32 kr.

5) Es werden unter eine gewisse Anzahl Leute Belohnungen ausgetheilet. Der zweite bekömmt etwas mehr, als der erste; der dritte eben so viel mehr, als der zweite u. s. w. Der 4te und 9te bekommen zusammen 37 fl. Der 5te und 11te aber 46; wie viel hat jeder besonders bekommen? Antw. der 4te 11 fl., der 9te 26. Der 5te 14, und der 11te 23 fl.

6) Es sind etliche Kinder zusammen 42 Jahr alt, davon jedes Kind immer 2 Jahr älter ist, als das vorhergehende. Das 2te und 4te ist 12 Jahr alt; wie alt war jedes Kind, und wie viel Kinder waren es? Antw. 6 Kinder; das erste war 2 Jahr alt, das zweite 4. u. s. w.

7) Eine Reihe von 100 Bäumen, die 4 Ruthen von einander stehen, werden mit frischer Erde versehen. Diese Erde liegt 5 Ruthen von dem ersten Baume; wie gros ist der Weg, den man zu dieser Arbeit machen muß? Antw. er beträgt 40600 Ruthen.

207 §. Wenn man das erste Glied in einer Theilungsreihe mit der Steigzahl vervielfältiget: so bekömmt man das zweite. Vervielfältiget man das zweite Glied mit

der

der Steigzahl: so entsteht das dritte Glied. u. s. w.

I, II, III, IV, V, VI, VII.

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729.

208 §. In dieser Reihe ist 3, als das zweite Glied, der Inhalt von dem ersten Gliede und der Steigzahl, $3 = 1 \times 3$. Das zweite Glied 3 wird mit der Steigzahl 3 vervielfältiget, um das dritte $9 = 1 \times 3 \times 3$ zu bekommen. Das dritte Glied ist allso der Inhalt von dem ersten Gliede, und zwoen miteinander vervielfältigten Steigzahlen, oder kürzer: der Inhalt aus dem ersten Gliede und der zweiten Würde von der Steigzahl $1 \times 3 \times 3 = 1 \times 3^2$. Das vierte Glied ist der Inhalt von dem ersten Gliede und der dritten Würde von der Steigzahl, $27 = 1 \times 3 \times 3 \times 3 = 1 \times 3^3$. Ueberhaupt ist in jedem Gliede der Inhalt so vieler Steigzahlen, als Glieder vorhergehen, oder die Würdezahl von der Steigzahl eines jeden Gliedes ist um 1 kleiner als die Gliederzahl; weil die Steigzahl erst im zweiten Gliede anfängt. Deßwegen muß der Inhalt des ersten und vierten Gliedes so gros sein, als der Inhalt des zweiten und dritten; weil beide aus dem Inhalte des doppelten ersten Gliedes, und eben viel Steigzahlen bestehen.

209 §.

209 §. Jedes Glied einer Theilungsreihe enthält das erste Glied so vielmal, als die Steigzahl Einheiten hat, und alle andere Glieder einmal weniger. Denn das zweite Glied ist der Inhalt von dem ersten Gliede und der Steigzahl: folglich ist das erste Glied so vielmal darin, als die Steigzahl Einheiten hat. Z. B. aus der vorigen Reihe ist in dem zweiten Gliede 3 das erste Glied = 1 dreimal. Das dritte Glied = 9 ist der Inhalt von dem zweiten Gliede, und der Steigzahl 3, oder drei zweite Glieder machen ein drittes (207 §). Nimmt man von dem dritten Gliede das zweite = 3, und setzet dafür 3mal das erste Glied, als den Werth des zweiten: so wird das dritte Glied dreimal das erste, und zweimal das zweite Glied enthalten. Da nun jedes folgende Glied 3mal das nächstvorhergehende enthält, und man immer den Werth für $\frac{1}{3}$ des letzten Gliedes setzen darf: so enthält jedes Glied das erste so vielmal, als die Steigzahl Einheiten hat, und die mittlern Glieder einmal weniger, nämlich:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= 1 \\
\mathrm{II} &= 1\times 3 = 3 \\
\mathrm{III} &= 1\times 3 + 3\times 2 = 9 \\
\mathrm{IV} &= 1\times 3 + 3\times 2 + 9\times 2 = 27 \\
\mathrm{V} &= 1\times 3 + 3\times 2 + 9\times 2 + 27\times 2 = 81.
\end{aligned}
$$

210 §.

210 §. Wenn das erste Glied, die Glieder= und Steigzahl gegeben sind: das letzte Glied finden.

In jedem Gliede ist die Anzahl der Steigzahlen, die miteinander vervielfältiget werden, um 1 kleiner, als die Gliederzahl (208 §). Man vervielfältige allso so viel Steigzahlen miteinander, als die um 1 verkleinerte Gliederzahl Einheiten hat. Mit diesem Inhalte der Steigzahlen wird das erste Glied vervielfältiget, und man wird das verlangte erhalten. Z. B. das erste Glied sei = 3, die Steigzahl = 2, und die Gliederzahl = 12; oder man suchet das 12te Glied. Zu diesem Ende werden 11 Steigzahlen, weil die Gliederzahl 12 ist, miteinander vervielfältiget, oder die Steigzahl 2 wird zur 11ten Würde erhoben, nämlich: 2mal 2 ist 4. 2mal 4 ist 8. 2mal 8 ist 16. 2mal 16 ist 32 u. s. w. bis man die Steigzahl 11mal genommen hat, wodurch $2048 = 2^{11} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ entsteht. Wird 2048 mit dem ersten Gliede = 3 vervielfältiget: so ist 6144 das 12te Glied.

211 §. Es ist aber nicht nothwendig, daß man diese Steigzahlen eine um die andere nimmt. Man kann auch mit vielen aufeinmal vervielfältigen: wenn man mit

dem

dem Inhalte von etlichen vervielfältiget. Denn wenn man 2 mit 4 vervielfältiget: so entsteht eben so wohl 8, als wenn man 2 mit 2, und diesen Inhalt wieder mit 2 vervielfältiget. Deßwegen vervielfältiget man anfänglich 2 mit 2; und das gibt = 4. Nun ist in 4 der Inhalt von 2 Steigzahlen, welches der Würdezeiger 2 anzeiget, als 4^2. Jetzt vervielfältiget man 4^2 mit 4^2; das gibt = 16^4. Darin ist der Inhalt von 4 Steigzahlen, weil er in 4^2 von 2 war. 16^4mal 16^4 gibt allso den Inhalt von 8 Steigzahlen = 256^8. Nun müßte 256^8 noch mit 3 Steigzahlen nacheinander vervielfältiget werden, an deren Statt man aber den Inhalt von 3 Steigzahlen, nämlich $8^3 = 2 \times 2 \times 2$ nimmt, mit welchem 256 vervielfältiget wird, und 2048^{11} für den Inhalt von 11 Steigzahlen herausbringt.

212 §. Da die oberwärts geschriebenen Würdezeiger die Anzahl der Steigzahlen bemerken, aus welchen der Inhalt besteht; und diese zusammengezählet werden: wenn die Steigzahlen vervielfältiget werden: so kann man verschiedene Wege nehmen, um zur verlangten Würde der Steigzahl zu kommen. Z. B. in voriger Aufgabe ist der Würdezeiger der Steigzahl = 11. 8+3 gibt so wohl 11, als 9+2, und 7+4. Deß-

wegen

wegen nehme man die Summe der Würdezeiger, und diese wird zeigen, welche Würden der Steigzahlen vervielfältiget werden müssen. Z. B. wenn man 8^3 mit 8^3 vervielfältiget: so gibt das 64^6. Man vervielfältige 64^6 mit 8^3: so wird der Würdezeiger von dem Inhalte 9 sein, nämlich $64^6 \times 8^3 = 512^9$. An 9 fehlet noch 2 um 11 daraus zu machen. Man vervielfältige allso 512^9 mit einem Inhalte, wovon der Würdezeiger 2 ist, nämlich $512^9 \times 4^2 = 2048^{11}$.

213 §. Aus dem ersten Gliede, der Steig = und Gliederzahl die Summe aller Glieder finden.

Man suche ein Glied, das um eine Staffel gröser ist, als das höchste; davon ziehe man das kleinste Glied ab. Der Ueberschuß wird mit der um 1 verkleinerten Steigzahl getheilet: so wird man die begehrte Summe erhalten. Z. B. die Summe der obigen 12 Glieder ist = 12285. Denn das 13te Glied ist = 12288; davon wird 3, als das niedrigste Glied abgezogen: so bleibt 12285. Die Steigzahl ist = 2, und 2 weniger gibt 1, womit 12285 getheilet wird, und zur Summe aller Glieder 12285 herausbringt. Das ganze Verfahren wird allso ausgedrücket:

$$\frac{12288 - 3.}{2 - 1}$$

214 §. In einer abnehmenden Reihe ist das erste Glied des höchste, und das zweite wird gefunden: wenn das höchste mit der Steigzahl getheilet wird (191 §). Da nun in dem folgenden Gliede eine Steigzahl weniger ist: so muß das erste Glied in einer abnehmenden Reihe mit dem Inhalte so vieler Steigzahlen getheilet werden, als die Gliederzahl des verlangten Gliedes Einheiten hat, wenn zuvor 1 davon abgezogen worden ist. Z. B. wenn das 12te Glied = 6144 mit dem Inhalte von 11 Steigzahlen = 2048 getheilet wird: so kömmt das niedrigste = 3 heraus. Die Steigzahlen werden nach der gewöhnlichen Art gefunden (211 §).

215 §. Die Brüche beobachten dasselbige Gesetz, welches für ganze Zahlen festgesetzet worden ist. Man hat sich aber wohl in Acht zu nehmen, daß man dabei nicht angeführet werde, und das niedrigste Glied für das höchste ansehe, welches leicht geschehen kann, indem die folgenden Glieder durch die Vervielfältigung gefunden werden, und doch abnehmen. Z. B. in der $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ u. s. w. ist das höchste Glied = $\frac{1}{2}$, und $\frac{1}{16}$ das niedrigste, und die Steigzahl = 2. Um aber davon die Summe zu finden, wird ein Glied gesuchet, das gröser ist, als $\frac{1}{2}$, welches aber 1 ist, davon wird das kleineste = $\frac{1}{16}$ abgezogen,

und

und mit 2 — 1 wird getheilet, um die Summe = $\frac{15}{16}$ zu erhalten.

216 §. Wenn diese Reihe ohne Ende fort gehen, das ist, so weit fort geführet werden soll, daß das letzte Glied wegen seiner Kleinigkeit für nichts gehalten werden kann: so wird die Summe dieser Brüche = 1 sein. Denn das Glied über $\frac{1}{2}$ ist = 1, und das niedrigste ist ohngefähr 0. Nun ist aber

$$\frac{1 - 0}{1 - 1} = 1.$$

217 §. Obschon in der Reihe $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, u. s. w. das folgende Glied gefunden wird, wenn man das erste mit $\frac{1}{2}$ vervielfältiget: so ist doch nicht $\frac{1}{2}$ die Steigzahl, sondern 2; weil die Glieder durch diese Vervielfältigung immer abnehmen, und jedes vorhergehende 2mal grösser ist, als das folgende. Daß die Vervielfältigung mit Brüchen eine wahrhafte Theilung sei, ist schon oben gezeiget worden (93 §).

218 §. Aufgaben in Theilungsreihen.

1) Ein Spieler spielet um 3 Batzen, und verliert das erste Spiel. Darauf verdoppelt er den Einsatz, und verliert wieder. Er verdoppelt und verliert 20mal seinen Satz; wie stark ist sein Verlust? Antw. 209715 Gulden.

2) Ein Spieler verliert in 12 Spielen 682 Gulden 40 Kreuzer. Er hat seinen Einsatz immer verdoppelt; wie viel hat er anfänglich gesetzt? Antw. 1 Kopfstück.

3) Eine Gemeinde, welche sich weigert, die gebührende Schatzung zu geben, wird mit 8 Soldaten dergestalt beleget, daß sie jedem den ersten Tag 2 fl., den 2ten Tag 6 fl. und so immer jeden Tag 3mal mehr bezahlen muß. Sie ergibt sich erst am 8ten Tage; wie viel muß sie den Soldaten bezahlen? Antw. 52480 Gulden.

XVII Hauptstück.

Von dem Verhältnisse und Ebenmaase.

219 §. Die Beziehung einer Zahl auf die andere nennet man ein **Verhältniß**. Die Beziehung einer Zahl auf die andere wird entweder durch die Abziehung oder durch die Theilung gefunden. Durch die erste erkennet man das **Unterschiedsverhältniß**, und durch die andere das **Theilungsverhältniß**, und jedes hat das Zeichen seiner Rechnungsart bei sich. Z. B. 8 — 2 ist ein Unterschiedsverhältniß; und 8 : 2 ein Theilungsverhältniß, welches nichts anders heist, als: 8 verhält sich zu 2. Die erste

erste Zahl heist das Vorderglied, die zweite das Hinterglied. Woran eine Zahl die andere übertrifft, dieses wird der **Verhältnißnamen** genennet. Im dem obigen Unterschiedsverhältnisse ist 6 der Namen, und im Theilungsverhältnisse ist es 4.

220 §. Zwei gleiche Verhältnisse nennet man ein **Ebenmaas**. Nach Art der Verhältnisse gibt es ein **Unterschiedsebenmaas**, und ein **Theilungsebenmaas**, nachdem zwei Unterschieds- oder Theilungsverhältnisse sich gleichen. 8 — 2 = 18 — 12 ist ein Unterschiedsebenmaas, und heist: 8 verhält sich zu 2, wie 18 zu 12; oder bestimmter: um wie viel 8 gröser ist, als 2, um so viel ist 18 gröser, als 12. Ein Theilungsebenmaas wird so geschrieben, 8 : 2 = 4 : 1 und heist: 8 verhält sich zu 2, wie 4 zu 1; oder bestimmter: wie vielmal 8 gröser ist, als 2, so vielmal ist 4 gröser, als 1. Da es in beiden Ausdrücken nur auf ein gleiches Verhältniß ankömmt: so kann man auch so schreiben: 2 — 8 = 12 — 18, und 2 : 8 = 1 : 4, wo man dasselbige herausbringen wird.

221 §. Die beiden Vorder- und Hinterglieder der Verhältnisse nennet man **gleichnamige Glieder**. Zu jedem Ebenmaase gehören allse 4 Glieder. Wird nun ein Ebenmaas

nur in dreien Gliedern gegeben: so wird eines zweimal gesetzet, welches sich alsdann auf die beiden andern bezieht. Z. B. 2 : 4 = 4 : 8. 6 — 4 = 4 — 2.

222 §. In einem Ebenmaase müssen sich die Verhältnißnamen gleich sein: sonst sind die Verhältnisse einander nicht gleich.

223 §. Wenn zwischen allen Zahlen einerlei Verhältnißnamen ist: so nennet man dieses ein **stetiges Ebenmaas**. Z. B. 1 — 2 = 3 — 4; 2 : 4 = 8 : 16. In dem Unterschiedsebenmaase ist er 2 zwischen allen Zahlen; wie auch in 3 — 2 = 2 — 1, 2:4 = 4:8, worin man den Namen zwischen denselbigen Zahlen nicht nehmen darf, sondern von 3, 2, 1 und 2, 4, 8. Im getrennten Ebenmaase haben die mittlern Zahlen den gleichen Namen nicht. Z. B. 2 : 4 = 6 : 12, 2 — 3 = 5 — 6.

224 §. Deßwegen müssen 4 oder 3 aufeinander folgende Staffelzahlen in einem stetigen Ebenmaase sein. Im Gegentheile machen 4 Staffelzahlen ein getrenntes Ebenmaas: wenn etliche Zwischenglieder, oder eines davon ausgestosen werden. Z. B. 1:2 = 32 : 64, zwischen welchen noch 3 Staffelzahlen fehlen.

225 §. In einem Unterschiedsebenmaase ist die Summe der äusern Glieder der Summe der mittlern gleich. Z. B. wenn $8 - 2 = 18 - 12$: so ist auch $8 + 12 = 18 + 2$. Denn da auf beiden Seiten alles gleich ist (220 §): so bleibt diese Gleichheit, wenn man rechter Hand zu 18 zwei mehr nimmt, anstatt bei 8 zwei weniger zu nehmen. Deßgleichen wenn man bei 8 zwölf mehr nimmt, anstatt bei 18 zwölf weniger zu nehmen, welches man mit $8 + 12 = 18 + 2$ ausdrücket.

226 §. In einem Theilungsebenmaase ist der Inhalt der äusern Glieder so gros, als der Inhalt der mittlern. Z. B. in $2 : 4 = 8 : 16$ ist $2 \times 16 = 4 \times 8$. Denn $2 : 4 = 8 : 16$ ist eben so viel, als $\frac{2}{4} = \frac{8}{16}$ (219 §). Soll nun $\frac{2}{4}$ so gros sein, als $\frac{8}{16}$: so müssen sie sich auch gleich sein, wenn sie unter einerlei Nenner gebracht werden. Zu diesem Ende muß Zähler und Nenner in $\frac{2}{4}$ mit 16, auch Zähler und Nenner in $\frac{8}{16}$ mit 4 vervielfältiget werden (81 §). Da es aber genug ist: wenn die Zähler sich gleichen; indem jeder Bruch den Inhalt von 4 und 16 zum Nenner bekäme; so kömmt es nur darauf an, daß 2 mit 16 und 8 mit 4 vervielfältiget werden, woraus denn beiderseits ein gleicher Inhalt, nämlich 2mal 16 und 4mal 8 = 32 entstehen muß. Es ist aber 2mal 16 der Inhalt der äusern, und 4mal 8 der Inhalt der mittlern Glieder.

227 §. Wenn man nun in gewissen Zahlen das Ebenmaas vermittelst der Theilung nicht einsehen kann: so nehme man den Inhalt der äusern und mittlern Glieder, deren Gleichheit von dem Ebenmaase zeugen wird.

228 §. In jedem Theilungsebenmaase das vierte Glied finden.

Man vervielfältiget das zweite Glied mit dem dritten; und theilet diesen Inhalt mit dem ersten Gliede. Z. B. um zu 2:6 = 8 das vierte ebenmäsige Glied zu finden, wird 8 mit 6 vervielfältiget, und der Inhalt 48 mit 2 getheilet, um 24 zum vierten Gliede zu bekommen. Das Ebenmaas ist allso: 2:6 = 8:24. Denn indem man 8 mit 6 vervielfältiget: so wird der Inhalt der mittlern Glieder genommen, welcher dem Inhalte des ersten 2 und des unbekannten vierten gleich ist (226 §). Wird nun dieser Inhalt mit 2 getheilet: so wird das vierte gesuchte Glied herauskommen.

229 §. Dieser Satz kömmt mit der Regel von Dreien überein (116 §), welche gemeinlich aus dem Ebenmaase bewiesen wird.

230 §. In einem stetigen Ebenmaase von 3 Gliedern wird das dritte gefunden: wenn das Viereck des zweiten Gliedes mit dem

erst-

ersten getheilet wird. Z. B. zu 2 : 4 = 4 ist $\frac{4 \times 4}{2}$ = 8 das dritte Glied, nämlich 2 : 4 = 4 : 8; weil 2mal 8 = 4mal 4. Die Viereckswurzel von 2 × 8 wird das mittlere Glied 4 geben.

231 §. Wenn zween gleiche Inhalte in 4 Glieder zerleget werden: so gibt ein Inhalt die äusern Glieder, und der andere die mittlern; z. B. 24 = 24. Deßwegen entsteht dieses Ebenmaas: 2:3 = 8:12, oder 4:3 = 8:6, oder 4:2 = 12:6 u. s. w.

232 §. Die Glieder eines Ebenmaases lassen sich versetzen, und werden immer ebenmäsig bleiben, so lang der Inhalt der äusern dem Inhalte der mittlern Glieder gleich bleibt, welche Veränderung auch nach den 4 Rechnungsarten vorgenommen werden kann; indem die gleichnamigen Glieder vermehret oder verkleinert werden.

XVIII Hauptstück.

Von den Verhältnißzahlen.

233 §. Wenn man in einer Theilungsreihe unter jedes Glied die Anzahl der Steigzahlen schreibt, welche darin enthalten sind: so wird das erste Glied = 0, das zweite = 1, das dritte = 2 u. s. w.,

allso daß daraus eine Unterschiedsreihe entsteht. Z. B.

I	II	III	IV	V	VI	VII
1,	2,	4,	8,	16,	32,	64
0,	1,	2,	3,	4,	5,	6

234 §. Die Steigzahl zeiget an, wievielmal eine Zahl gröser ist, als die folgende (190 §). Sie ist allso der Verhältnißnamen zwischen zwoen Zahlen (219 §). Da nun jedes Glied der Unterschiedsreihe die Anzahl der Steigzahlen bemerket, die in ihrem zugehörigen Gliede aus der Theilungsreihe enthalten ist: so bestimmet jede Zahl aus der Unterschiedsreihe die Anzahl der Verhältnisse, die zwischen dem ersten und dem zugehörigen Gliede aus der Theilungsreihe enthalten ist. Deßwegen heist eine Zahl aus der Unterschiedsreihe die **Verhältnißzahl** ihres zugehörigen Gliedes aus der Theilungsreihe. Z. B. 1 als das erste Glied der Theilungsreihe hat keine Steigzahl, und hat deßwegen zur Verhältnißzahl 0. 1 aus der Unterschiedsreihe ist die Verhältnißzahl von 2 aus der Theilungsreihe, und bemerket, daß zwischen 1 und 2 nur eine Steigzahl und folglich auch nur ein Verhältniß sei. 5 ist die Verhältnißzahl von 32, und zeiget, daß 32 um den Inhalt von 5 Steigzahlen gröser ist, als 1.

235 §. Da die Verhältnißzahlen in einer Unterschiedsreihe stehen: so kann aus jeder Verhältnißzahl durch die Zusammenzählung oder Abziehung jede andere Verhältnißzahl gefunden werden (193 §); unterdessen daß das Glied, welches aus der Theilungsreihe dazu gehöret, durch die Vervielfältigung oder Theilung gefunden wird (208 §). Es erhellet hieraus, daß die Verhältnißzahlen leichter gefunden werden, als die Glieder der Theilungsreihe.

236 §. Gibt deßwegen der Inhalt aus dem 3ten und 4ten Gliede das 6te Glied: so wird die Summe der Verhältnißzahlen vom 3ten und 4ten Gliede, die Verhältnißzahl für das 6te Glied sein.

	III		IV		VI	
Z. B.	4	×	8	=	32	u. s. w.
	2	+	3	=	5	

237 §. Wenn aus dem 6ten Gliede durch die Theilung mit dem 4ten Gliede das 3te gefunden wird: so wird aus dem Unterschiede der Verhältnißzahlen vom 6ten und 4ten Gliede, die Verhältnißzahl für das 3te Glied gefunden werden. Z. B.

VI		IV		III
32	:	8	=	4
5	—	3	=	2

238 §. Weil ein Bruch eine Theilung anzeiget (68 §): so wird die Verhältnißzahl des Nenners von der Verhältnißzahl des Zählers abgezogen, um die Verhältnißzahl des Bruches zu bekommen.

239 §. Wird ein Glied zum Vierecke gemacht, oder werden zwei gleiche Glieder miteinander vervielfältiget: so werden die zwo Verhältnißzahlen dieser Glieder zusammengezählet; oder weil sie doch gleich sind, eine derselben mit 2 vervielfältiget. Z. B.

IV IV VII
8 × 8 = 64
3 + 3 = 6, oder 3 × 2 = 6

240 §. Aus gleichem Grunde ist die Verhältnißzahl zum Würfel, die dreifache Verhältnißzahl von der Wurzel. Z. B.

III III III VII
4 × 4 × 4 = 64
2 + 2 + 2 = 6 oder 2 × 3 = 6

241 §. Wird aus dem Vierecke, die Wurzel gezogen: so gibt die halbe Verhältnißzahl vom Vierecke, die Verhältnißzahl zur Wurzel.

Die Wurzel 64 = 8
6 : 2 = 3

242 §. Daß Drittel der Verhältnißzahl eines Würfels ist die Verhältnißzahl der Würfelwurzel.

Die Würfelwurzel von 64 = 4
6:3 = 2

243 §. Wenn man derohalben eine Theilungsreihe von Zahlen hat, und wissen will, was für ein Glied durch die Vervielfältigung oder Theilung eines mit dem andern herauskomme; so kann man dieses Glied durch die Summe oder den Unterschied der Verhältnißzahlen ohne Mühe finden, wenn die erste derselben = 0 ist; wie wir schon gesehen haben. Hat man aber die Verhältnißzahl gefunden: so suchet man sie in der Unterschiedsreihe, und man wird darüber die verlangte Zahl aus der Theilungsreihe finden. Z. B. welches Glied wird in der Theilungsreihe herauskommen: wenn das dritte = 4 und das 5te = 16 miteinander vervielfältiget werden (233 §)? Die Summe ihrer Verhältnißzahlen 2+4 geben 6 für die Verhältnißzahl des verlangten Gliedes. Ueber 6 findet man das Glied selbst = 64.

244 §. Um diesen Vortheil in der Vervielfältigung und Theilung mit grosen Zahlen anzubringen, hat man wirklich eine Theilungsreihe aufgesetzet, worin das erste Glied = 1 und die Steigzahl = 10 ist. Z. B.

1, 10, 100, 1000, 10000
0, 1, 2, 3, 4 Zwisch-

suchet man die Verhältnißzahl, deren Summe die Verhältnißzahl für die gegebene Zahl ist. Die gegebene Zahl besteht aus dem Inhalte ihrer Vervielfältiger. Wenn Zahlen miteinander vervielfältiget werden: so werden ihre Verhältnißzahlen zusammengezählet (236 §). Folglich muß die Summe der Verhältnißzahlen von den Vervielfältigern die Verhältnißzahl fur den Inhalt derselben geben.

Z. B. Die Zahl sei 26907804; ihre Vervielfältiger sind 263802. 102, wovon der erste für das Verzeichniß noch zu gros ist, und darum in die Vervielfältiger 462. 571 zerleget wird. Die Verhältnißzahlen zu diesen sind folgende:

$$462 = 2{,}6646420$$
$$571 = 2{,}7566361$$
$$102 = 2{,}0086002$$

$$26907804 = 7{,}4298783 \text{ Verhz.}$$
$$462 = 2{,}6646420$$
$$571 = 2{,}7566361$$

$$263802 = 462 . 571 = 5{,}4212781 \text{ Verhz.}$$

249 §. Die verlangte Verhältnißzahl läßt sich auch auf folgende Art finden, die besonders für untheilbare Zahlen nothwendig ist.

1) Suchet man die Verhältnißzahl von den 4 ersten Ziffern, zu welcher man die Verhältniß-

nißzahl von 10, 100, oder 1000 zählet; nachdem man nämlich eine, zwo, oder drei Ziffern zurückgelassen hat.

2) Die Verhältnißzahl der 4 ersten Ziffern wird von der nächst grösern Verhältnißzahl in dem Verzeichnisse abgezogen.

3) Aus dem Unterschiede der Verhältnißzahlen; aus 10, 100 oder 1000: und aus den zurückgelassenen Ziffern der gegebenen Zahl wird nach der Regel von Dreien gefunden, wie viel man noch zu der aufgesuchten Verhältnißzahl der 4 Ziffern setzen solle, um die Verhältnißzahl von der ganzen Zahl zu bekommen. Z. B. welches ist die Verhältnißzahl von 263802? Man nehme davon 2638 und lasse 02 zurück; die Verhältnißzahl von 2638 findet sich = 3,4212748, welche mit der Verhältnißzahl von 100, die 2,0000000 ist, 5,4212748 ausmachet.

Die Verhältnißzahl von 2638 = 3,4212748 wird von der Verhältnißzahl 3,4214394 abgezogen, die zu der Zahl 2639 gehöret. Der Unterschied davon ist 1646. Nun setzet man: 100: 1646 = 2? Antw. $32\frac{92}{100}$, welches zu 5,4212748 gezählet wird: so wird man 5,4212781 für die Verhältnißzahl von 263802 bekommen. $\frac{92}{100}$ hat man für 1 gelten lassen; weil sehr wenig daran fehlet.

Der

Der Beweis dieses Verfahrens wird aus der Natur der Verhältnißzahlen genommen. Denn werden in 263802 die Ziffern 02 nicht genommen; so thut man eben so viel, als nähme man 263800; weil 263802=263800 +02. Es ist aber 263800 eben so viel, als 2638 × 100. Die Summe der Verhältnißzahlen von 2638 und 100 ist allso die Verhältnißzahl von 263800 (236 §). Die Zahl 263800 ist kleiner, als die Zahl 263802: folglich wird die Verhältnißzahl von der erstern kleiner sein, als die von der leztern. Wie viel aber dieses betrage, wird aus dem Ebenmaase gefunden, in welchem man voraussezet, daß die Unterschiede der Verhältnißzahlen nach dem Ebenmaase der Zahlen selbst steigen, welches aber nur beinahe wahr ist. Anstatt des Unterschiedes der Verhältnißzahlen von 263800 und 263900 hat man nur den Unterschied von 2638 und 2639 genommen; weil er einerlei ist.

250 §. Wenn nach den 4 ersten Ziffern in einer gegebenen Zahl mehr Ziffern folgen, als man in den Tafeln aufsuchen kann: so läßt sich die Verhältnißzahl anders nicht, als nach der erstern Art finden.

251 §. Die Verhältnißzahl eines Bruches finden.

Man suchet die Verhältnißzahl des Zählers und des Nenners; und zieht diese von

jener

jener ab (238 §). Weil aber bei einem ächten Bruche der Nenner gröser ist, als der Zähler: so kann die Verhältnißzahl des erstern von der Verhältnißzahl des letztern nicht abgezogen werden. An dessen Statt wird so viel von der Verhältnißzahl des Nenners genommen, und von der Verhältnißzahl des Zählers abgezogen, als die Verhältnißzahl des Zählers hat, welches geschieht, indem die Verhältnißzahl des Zählers von der Verhältnißzahl des Nenners abgezogen wird; dessen Ueberschuß bekömmt das Abziehungszeichen. Z. B. die Verhältnißzahl von $\frac{3}{4}$ findet sich dergestalt.

$$
\begin{array}{l}
3 = 0,4771212 \text{ Abzug.} \\
4 = 0,6020600 \\
\hline
\frac{3}{4} = -0,1249388
\end{array}
$$

Man kann leicht sehen, daß die Verhältnißzahl eines Bruches das Abziehungszeichen haben müsse. Denn in der Staffelreihe (244 §) ist 1, als das erste Glied, gleichsam der Mittelpunkt der Staffelreihe. Rechts steigt dieselbe, und links fällt sie. Deßwegen müssen die Verhältnißzahlen von 0 an auch so steigen und fallen. Weil in diesen 1 die Steigzahl ist: so muß das erste Glied linker Hand 0 — 1 oder — 1; das zweite — 2 sein u. s. w. Es hat allso die Verhältnißzahl eines Bruches das Abziehungszeichen.

252 §. Eine vermischte Zahl kann zu einem Afterbruche gemachet werden, um ihre Verhältnißzahl zu finden.

253 §. Zu der gegebenen Verhältnißzahl die gehörige Zahl finden.

Man suchet in dem Verzeichnisse die Verhältnißzahl auf; so wird man daneben die verlangte Zahl finden. Z. B. bei 3,7684161 steht die Zahl 5867.

254 §. Findet sich die gegebene Verhältnißzahl nicht genau: so kann man die Zahl von einer Verhältnißzahl nehmen, die der gegebenen am nächsten kömmt. Z. B. die Verhältnißzahl 2,5523031 ist für die Zahl 357 zu klein, und für 356 zu gros. Ich nehme allso 356, und suche dieselbige Verhältnißzahl unter der Kennziffer 3 auf, wo sich bei 3,5523031 die Zahl 3567 findet, wovon die lezte 7 in $\frac{7}{10}$ verwandelt wird, allso daß zur Verhältnißzahl 2,5523031 die verlangte Zahl $356\frac{7}{10}$ gehöret. Indem die Kennziffer 2 in 3 verwandelt worden ist: so hat man zu der gegebenen Verhältnißzahl 1,0000000 gezählet, welches die Verhältnißzahl von 10 ist. Die Verhältnißzahl 3,5523031 gehöret nun zu einer Zahl, die 10mal gröser ist als die Zahl von 2,5523031 (245 §). Wird nun die Zahl 3567, wozu 3,552301 gehöret, mit 10 getheilet: so kömmt $356\frac{7}{10}$ heraus, welche Zahl zu 2,5523031 gehöret.

255 §. je kleiner die Kennziffer der Verhältnißzahl ist, desto genauer kann man die Zahl dazu finden. Z. B. die Zahl zu 0,5523031 ist $3\frac{567}{1000}$.

256 §. Sobald die Verhältnißzahl zur Kennziffer 3 hat, wie 3,5524118: so verfährt man folgender Gestalt. Die gegebene Verhältnißzahl suchet man unter der Kennziffer auf, welche man aber nicht genau findet. 3,5523031 ist kleiner, und 3,5524248 ist grösser, als die gegebene, welche zwischen beide fällt; sie bekömmt deßwegen die Zahl 3567 von der erstern, und was sie mehr haben soll, wird allso gefunden. Die kleine Verhältnißzahl wird von der grösern abgezogen, und der Unterschied 1087 gefunden. Die gegebene Verhältnißzahl wird von der grösern auch abgezogen, und ihr Ueberschuß ist 1217. Nun spricht man: 1217 : 1 = 1087? Antw. $\frac{1087}{1217}$, welches noch zu 3567 gesetzet wird, um die ganze Zahl 3567 $\frac{1087}{1217}$ für 3,5524118 zu bekommen. Denn wenn die Verhältnißzahl um 1217 gröser ist: so ist die Zahl dazu um 1 gröser. Nun ist aber die Verhältnißzahl um 1087 gröser: um wie viel wird die Zahl gröser sein? Welcher Schluß denselbigen Grund hat, wie der obige (249 §).

257 §. **Zu einer gegebenen Verhältnißzahl, die gröser ist, als eine aus dem Verzeichnisse, die Zahl finden.**

Man zieht von der gegebenen Verhältnißzahl die Verhältnißzahl von 10, 100, oder

1000 ab, damit der Ueberschuß eine Verhältnißzahl werde, die sich aufsuchen läßt. Nach den vorigen Aufgaben suchet man die dazu gehörige Zahl. Diese Zahl wird mit 10, 100 oder 1000 vervielfältiget: so wird der Inhalt die verlangte Zahl sein. Z. B. die Verhältnißzahl sei 4,5524118. Zieht man 1,0000000, als die Verhältnißzahl von 10, davon ab: so ist der Ueberschuß 3,5524118. Die dazu gehörige Zahl ist $3567 \frac{1087}{1217}$ (254 §), welche mit 10 vervielfältiget wird, um $35678 \frac{1144}{1217}$ für die Verhältnißzahl, 4,5524118 zu bekommen; weil die Zahl für eine Verhältnißzahl, worin 4 die Kennziffer ist, 10mal gröser ist, als eine, deren Verhältnißzahl 3 zur Kennziffer hat.

258 §. **Die Zahl zu einer Verhältnißzahl finden, die das Abziehungszeichen bei sich hat.**

Weil eine solche Verhältnißzahl zu einem Bruche gehöret; so zieht man dieselbe von einer andern beliebigen Verhältnißzahl ab. Zu dem Ueberschusse suchet man die gehörige Zahl, und theilet dieselbe mit derjenigen Zahl, von welcher man die Verhältnißzahl genommen hat: alsdann wird man den verlangten Bruch haben. Eigentlich sollte man die grösere Verhältnißzahl von der kleinern abziehen, damit

damit die zu der grösern gehörige Zahl der Theiler oder Nenner abgeben könnte. Weil aber die angenommene Verhältnißzahl gröser ist, als die gegebene: so zieht man von jener so viel ab, als diese in sich enthält. Z. B. welches ist die Zahl zu der Verhältnißzahl —0,1249388.

Die Verhältnißz. von 10000	=	4,0000000
Die gegebene	=	—0,1249388
Die Verhältnißz. von 7500	=	3,8750612,

welche der Zähler des Bruches ist, wozu 10000 als der Nenner gehöret. Der Bruch ist deßwegen $= \frac{7500}{10000} = \frac{3}{4}$, wie oben (251 §).

259 §. Den aus dieser Lehre fliesenden Nutzen lehren folgende Aufgaben.

1) Welches ist die Wurzel vom Vierecke 294849? Antw. 543. Die Verhältnißzahl vom 295849 ist 5,4695278 (249 §), und die Hälfte davon ist 2,734639, wozu die Zahl 543 die Wurzel ausmachet.

2) Ein Kapital von 6000 fl. steht schon 100 Jahre, und die Zinse eben so lang; wie viel wird es zusammen betragen zu 5 von 100? Antw. 789000 fl. Der Aufsatz ist:

20 — — 21 — — 6000
20 — — 21
u. s. w.

Nach der zusammengesetzten Regel von Dreien müßte 20 und 21 100mal genommen werden (152 §), welches eine langweilige Arbeit gäbe, die in Verhältnißzahlen verkürzet wird. V soll hier Verhältnißzahl anzeigen.

	3,7781512	= V. von 6000
	132,2219300	= 100mal V. von 21.
	136,0000812	die Summe der vor.
Abzug	130,1030000	= 100mal V. von 20
	5,8970812	

Zu der letzten Zahl findet sich in den Tafeln die verlangte Zahl 789000.

3) Nach 3 Jahren soll man 27783 ohne Zins bekommen. Man verlanget aber das Geld voraus gegen Abzug des Zinses vom Zinse zu 5 von 100: wie viel wird man bekommen? Antw. 24000 fl. Der Aufsatz ist: $21^3 - 20^3 - 27783$, wofür man Verhältnißzahlen nimmt.

	4,4437791	V. von 27783
	3,9030900	3mal V. von 20
	8,3468691	Summe
Abzug	3,9666379	
	4,3802112	V. von 24000.

3) Ein Spieler setzet 3 Batzen auf eine Karte, und verliert. Er steigt mit seinen 3 Batzen, und verliert wieder: dieses Steig-

en

en und Verlieren geht 20 Spiele hoch, in welchen ein Verlust von 209715 fl. herauskömmt. Wie ist der Spieler mit seinem Einsatze gestiegen? Antw. Er hat seinen Einsatz immer verdoppelt. 209715 fl. geben 3145725 Batzen für die Summe der ganzen Staffelreihe; und 3145728 ist davon das 21te Glied, welches mit dem ersten Gliede 3 getheilet wird, und 1048576 für den Inhalt von 20 Steigzahlen herausbringt. 1048576 läßt sich in die Vervielfältiger 4096 und 256 zerlegen. Nun schreitet man zu den Verhältnißzahlen.

3,612360 = 4096
2,408240 = 256

6,020600 = Summe.

Diese mit 20 geth. gibt 0,301030 die Verhältnißzahl für 2.

XIX Hauptstück.

Von den Verbindungen.

260 §. Dinge miteinander verbinden, heißt hier so viel als, dieselben zusammennehmen. Je zwei und zwei nennet man Paare, Zweier, Amben; je drei und drei, Dreier, Ternen; je vier und vier, Vierer, Quaternen u. s. w.

261 §. Wenn man 5 Dinge (wir wollen sie mit den Buchstaben a, b, c, d, e Deutlichkeit halben bezeichnen) paarweise nehmen will: so machet a mit den 4 folgenden Buchstaben 4 Zweier: ab, ac, ad, ae. Auf gleiche Art paaret sich jeder Buchstab von diesen fünfen mit den 4 andern. Es sind 5 Buchstaben da: allso gibt es 5mal 4 Zweier, welches sich mit 5. 4 = 20 ausdrücken läßt. Wenn man b mit a paaret: so entsteht der Zweier ba. Als man a mit den andern paarete: so bekam man auch den Zweier ab; welches denselbigen Zweier 2mal geben wird. Diese zweifache Zweier werden sich in allen 5 Buchstaben finden. Verlanget man nur einfache Zweier: so muß die Anzahl der Zweier 5. 4 durch 2 getheilet werden, welches mit $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ ausgedrücket wird. So machen 5 Buchstaben nur 10 Zweier, als nämlich:

a	b	c	d	e
	ab,	ac,	ad,	ae
		bc,	bd,	be
			cd,	ce
				de

262 §. Alle Zweier der 5 Buchstaben stellen allso eine Unterschiedsreihe vor, deren Summe die Anzahl aller Zweier geben wird.

Aus dieser Eigenschaft lassen sich auch die Zweier bestimmen.

263 §. Jeder Zweier kann sich mit einem von den Buchstaben a, b, c, d, e verbinden, welche Verbindung Dreier gibt (261 §.). In jedem Dreier soll derselbige Buchstab nur einmal vorkommen. Deßwegen kann sich jeder Zweier mit 2 Buchstaben weniger verbinden; nämlich ab verbindet sich nur mit c, d, e, ac mit b, d, e aus allen Buchstaben a, b, c, d, e, u. s. w.; weil im ersten Zweier schon ab, und im zweiten ac ist. Um allso die Anzahl der Dreier zu finden, muß die Summe der Zweier mit der Anzahl der Dinge, weniger 2, vervielfältiget werden. Nämlich wenn a, b, c, d, e die Dinge sind: so drücket $\frac{5.\,4.\,3}{2}$ die Anzahl aller Dreier aus; weil $\frac{5.\,4}{2}$ die Summe ihrer Zweier ist (261 §). Allein in dieser Anzahl Dreier kömmt derselbige Dreier 3mal vor, nämlich ab macht mit c, abc; ac mit b, acb; bc mit a, bca u. so w. Man theile allso die gefundene Anzahl Dreier mit 3: so wird man alle einfache Dreier bekommen. Der Ausdruck dazu heist: $\frac{5.4.3}{2.3} = 10.$

Es geben allso 5 Dinge nur 10 Dreier, nämlich: a, b, c, d, e

abc, abd, abe
bcd, bce
cde
acd, ade
bde
ade.

264 §. Wenn die Dreier sich mit einem von den 5 Buchstaben a, b, c, d, e verbinden: so werden Vierer daraus (261 §). Da in jedem Vierer derselbige Buchstab nur einmal sein darf: so kann sich jeder Dreier mit allen Buchstaben, weniger 3, verbinden; nämlich a b c verbindet sich nur mit d und e u. s. w. Um allso die Anzahl aller Vierer zu finden, muß die Anzahl der Dreier mit allen Dingen, weniger 3, vervielfältiget werden; nämlich $\frac{5.4.3.2}{2.3.}$, weil $\frac{5.4.3}{2.3.}$ der Ausdruck für die Dreier ist (263 §). Weil aber in diesen Verbindungen derselbige Vierer 4mal vorkömmt, nämlich, abcd, abdc, bcda, acdb: so muß dieser Inhalt $\frac{5.4.3.2.}{2.3.}$ noch mit 4 getheilet werden, um alle verschiedene Vierer zu bekomman, welches alsdann diesen Ausdruck gibt $\frac{5.4.3.2}{2.3.4.} = 5.$ Es geben allso 5 Dinge nur 5 Vierer.

265 §.

265 §. Man nehme jede Anzahl Dinge an statt der 5: so wird man auf eben diese Art verfahren können. Es läßt sich schon aus den 3 Verbindungsarten auf jede höhere Art schliesen.

266 §. **Die Zweier einer gegebenen Zahl finden.**

Man vervielfältiget die gegebene Zahl mit der nächst kleinern, und theilet diesen Inhalt mit 2 (261 §). Z.B. die Zweier von 12 sind $\frac{12.11}{2} = 66$; von 8 sind es $\frac{8.7}{2} = 28$: von 20 sind es $\frac{20.19}{2} = 190$.

267 §. **Die Dreier einer gegebenen Zahl finden.**

Zur der gegebenen Zahl nehme man noch die 2 niedrigern Zahlen. Der Inhalt dieser Zahlen wird mit dem Inhalte von 2 und 3 getheilet, und daraus wird die Anzahl der Dreier entstehen. (263 §). Z. B. die Dreier von 12 sind $\frac{12.11.10}{2.3.} = 220$: von 20 sind es $\frac{20.19.18}{2.3} = 940$,

268 §. **Die Vierer einer Zahl finden.**

Zu der gegebenen Zahl nimmt man die 3 niedrigern Zahlen, und vervielfältiget diese mit-

miteinander. Dieser Inhalt wird mit dem Inhalte von 2, 3, und 4 getheilet, und es werden die verlangten Vierer herauskommen (264 §). Z. B. die Vierer von 12 sind $\frac{12.\ 11.\ 10.\ 9}{2.\ 3.\ 4} = 495.$

269 §. Man kann leicht merken, daß die Vervielfältigung deßwegen mit Zeichen ausgedrücket wird, damit man die Abkürzungen desto leichter anbringen könne.

270 § Jede Verbindung von einer Zahl finden.

Man nimmt den Inhalt von so viel Zahlen, als die Verbindnngsart angibt, wozu die gegebene Zahl die erste ist, und alle andere um 1 kleiner sind. Dieser Inhalt wird mit dem Inhalte von so viel Zahlen, die bei 1 anfangen, und bis auf die Zahl der Verbindungsart gehen, getheilet. Z. B. wie viel Zehner gibt die Zahl 24? Antw. $\frac{24.\ 23.\ 22.\ 21\ 20.\ 19.\ 18.\ 17.\ 16.\ 15}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ 10} = 264.$

271 §. Durch bloses Zusammenzählen alle Verbindungen einer Zahl finden.

1) Man schreibet die Zahlen 1, 2, 3, 4 u. s. w. bis auf die Zahlen, wovon man die

Ver=

Verbindungen haben will, in einer Reihe übereinander.

2) Neben 1 schreibt man 0, weil eine Zahl kein Paar gibt. Neben 2 wird 1 geschrieben, welches das Paar von 2 Dingen anzeiget. Man zähle dieses Paar 1 und die daneben stehende Zahl 2 zusammen: so wird die Summe 3 die Paare von der Zahl 3 geben. Die Summe der Paare 3, und der Zahl 3 gibt 6 für die Paare von 4. Die Summe der Paare 6 und der Zahl 4 gibt 10 für die Paare der Zahl 5 u. s. w.

3) Neben die Paare werden die Dreier geschrieben. Neben 1 wird 0 gesetzet; und unter 0 die Zahl 1 als der erste Dreier. Der Dreier 1 und die Zweier 3 geben 4 für die Dreier der Zahl 4. Die Dreier 4 und Zweier 6 geben die Dreier 10 für die Zahl 5. Die Dreier 10 und die Zweier 10 geben 20 für die Dreier von 6 u. s. w.

4) Neben den Dreier 1 wird für die Vierer 0 gesetzet; und unter 0 die Zahl 1, als der erste Vierer. Der Vierer 1 und die Dreier 4 geben 5 für die Vierer von 5. Die Vierer 5 und Dreier 10 geben 15 für die Vierer von 6. Ueberhaupt gibt eine Zahl mit ihren zweiern die Zweier der folgenden Zahl; die Zweier mit ihren Dreiern geben die Dreier der folgenden Zahl; die Dreier mit ihren Vierern

die

die Vierer der folgenden u. s. w. Denn jede folgende Zahl enthält die nächstvorhergehende, und noch 1. Die folgende Zahl wird allso erstlich die Zweier der ersten Zahl enthalten. Das überschiesende 1 machet mit der vorigen Zahl noch so viel Zweier, als diese Zahl Einheiten hat. Folglich entstehen aus der Summe der Zweier und ihrer Zahl die Zweier der folgenden. Weil jede folgende Zahl die vorhergehende, und uoch 1 enthält: so werden die Dreier einer folgenden Zahl aus den Dreiern der vorhergehenden Zahl, und derselben Zweiern zusammen gesetzet werden. Denn das überschiesende 1 machet mit den Zweiern der vorhergehenden Dreier wieder so viel Dreier aus u. s. w.

Eins.	Zweier	Dreier	Vierer	Fünf.	Sechs.
1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0
3	3	1	0	0	0
4	6	4	1	0	0
5	10	10	5	1	0
6	15	20	15	6	1
7	21	35	35	21	7
8	28	56	70	56	28
9	36	84	126	126	84
10	45	120	210	352	210
11	55	165	330	462	462
12	66	220	495	792	924

272 §. Aus der jetzt gegebenen Verbindungstafel lassen sich schöne Eigenschaften herleiten. 1) Die Summe aller Zahlen bis auf 1 gibt die Zweier der nächstfolgenden Zahl. Z. B. die Zweier von 6 sind $= 5+4+3+2+1 = \frac{5+1.5}{2} = 15$. Wir wollen dieses beweisen. 6 machet Zweier mit 5+4+3+2+1. 5 mit 4+3+2+1. 4 mit 3+2+1. 3 mit 2+1. 2 mit 1. Alle diese Zweier machen eine Staffelreihe von 5 Zahlen aus, deren Summe $\frac{5+1.5}{2} = \frac{6.5}{2} = 15$. Von dieser Eigenschaft ist oben Meldung geschehen (262 §).

2) Die Summe aller Zweier von einer gewissen Zahl an, gibt die Dreier der folgenden Zahl. Z. B. die Dreier von 6 sind die Zweier 10+6+3+1 = 20. Denn aus Zweiern werden Dreier: wenn noch eine Zahl dazu kömmt (263 §). So viel Zweier in der vorigen Zahl sind: so viel Dreier werden in der folgenden sein. Die Zahl 2 machet nur einen Zweier: darum gibt die Zahl 3 auch nur einen Dreier.

Man nehme noch ein Ding mehr, daß man die Dreier von 4 bekomme: so hat 4 die Dreier von 3; weil 3+1 = 4; 4 machet mit den Zweiern von 3 so viel neue Dreier. Die Zahl 4 hat allso so viel Dreier, als die

Zahl

Zahl 3 Zweier und Dreier hat. Die Zahl 3 hat aber so viel Dreier, als 2 Zweier gibt: so hat denn die Zahl 4 so viel Dreier, als die Zahlen 2 und 3 Zweier haben.

Wir gehen weiter, und nehmen 5 Dinge zusammen: so hat die Zahl 5 so viel Dreier, als die Zahl 4: weil $4+1=5$; 5 machet mit den Zweiern von 4 so viel neue Dreier. 5 hat allso so viel Dreier, als 4 Zweier und Dreier hat. 4 hat aber so viel Dreier, als 2 und 3 Dreier haben. Deßwegen hat 5 so viel Dreier, als Zweier in 4, 3 und 2 sind u. s. w. Nämlich die Zahl 5 hat nach der Tafel 10 Dreier. Nach eben dieser Tafel haben die Zahlen 4, 3, 2 und 1 diese Zweier, 6, 3, 2, 1, deren Summe auch 10 ausmachet.

XX Hauptstück.

Von den Vieleckszahlen.

273 §. Eine Vieleckszahl ist die Summe etlicher Glieder aus einer Unterschiedsreihe, die von 1 anfängt. Z. B. von der Staffelreihe 1, 2, 3, 4 ist die Summe 10 eine Vieleckszahl. Die Vieleckszahlen haben ihren Namen von den vieleckigen Figuren, welche die Summe der zwei ersten Glieder aus der Staffelreihe machet: wenn man ihre Einheiten, als so viele Punkte betrachtet.

trachtet. Nachdem sich nun die Einheiten der Summe von zweien ersten Gliedern aus einer Unterschiedsreihe in ein Dreieck, Viereck, oder Fünfeck u. s. w. setzen lassen: so werden Dreiecks- Vierecks- oder Fünfeckszahlen entstehen.

274 §. Wenn die Staffelreihe mit 1 anfängt, und steigt: so geben die Summen dieser Reihe Dreieckszahlen; weil die Summe des ersten und zweiten Gliedes 3 ist, woraus sich ein Dreieck machen läßt. Z. B.

I, II, III, IV, V	Gliederzahlen.
1, 2, 3, 4, 5	Staffelzahlen.
1, 3, 6, 10, 15	Dreieckszahlen.
., .:.	Dreiecke.

275 §. Werden die Einheiten jeder Dreieckszahl in ein Dreieck gesetzet: so wird jedes Dreieck in jeder Seite so viel Punkte bekommen, als Glieder zusammengezählet worden sind. Z. B. die Summe von zweien Gliedern ist 3, welche Figur auf jeder Seite zween Punkte hat. Man nennet deßwegen die Gliederzahlen auch Seitenzahlen.

276 §. Wenn die Staffelzahlen mit 1 anfangen, und mit 2 steigen: so geben die Summen Viereckszahlen.

I, II, III, IV, V	Glieder- oder Seitenzahlen.
1, 3, 5, 7, 9	Staffelzahlen.
1, 4, 9, 16, 25	Viereckszahlen.
., ::	Viereck.

277 §. Steigen die Staffelzahlen von 1 mit 3: so kommen Fünfeckszahlen heraus.

I, II, III, IV, V	Seitenzahlen.
1, 4, 7, 10, 13	Staffelzahlen.
1, 5, 12, 22, 35	Fünfeckszahlen.
•, ⁘	Fünfeck.

278 §. Aus der Steigzahl 4 entstehen Sechseckszahlen.

I, II, III, IV, V	Seitenzahlen.
1, 5, 9, 13, 17	Staffelzahlen.
1, 6, 15, 28, 45	Sechseckszahlen
•, ⁘	Sechseck.

279 §. Gegenwärtige Muster zeigen offenbar, daß die Steigzahl um 2 kleiner ist, als die Figur Ecke hat. Nämlich das Dreieck hat 3 Ecke, und die Steigzahl der Staffelzahlen, woraus die Dreieckszahlen entstehen, ist 1 u. s. w. Die Zahl, welche die Ecke der Figur anzeiget, heist die **Eckzahl**. Weiß man die Eckzahl: so ist die Steigzahl um 2 kleiner.

280 §. Aus der gegebenen Seiten- und Eckzahl die Vieleckszahl finden.

Weil die Vieleckszahlen Summen von einer bestimmten Anzahl Staffelzahlen sind (273 §): so suchet man die Summe dieser Staffel-

Staffelzahlen (200 §). Das erste Glied dazu ist 1; die Steigzahl ist um 2 kleiner, als die Eckzahl; und die Seitenzahl gibt die Gliederzahl (275. 279 §). Z. B. man suchet die Dreieckszahl von 8.

Das erste Glied ist = 1
Die Steigzahl = 1, weil 3 die Eckzahl ist.
Die Glieder- oder Seitenzahl = 8
Das letzte Glied = 8

Die Summe aller Glieder ist $= 8 + 1 . \frac{8}{2} = 36$, und ist die Dreieckszahl von 8.

Die Viereckszahl von 8 ist $15 + 1 . \frac{8}{2} = 64 = 8 . 8$. u. s. w.

281 §. Bei den Dreieckszahlen ist die Gliederzahl so gros, als das letzte Glied aus der Staffelreihe. Deßwegen ist die Summe aller Glieder $\frac{8+1 . 8}{2} = \frac{9 . 8}{2}$, welches eben die Zweier von der Zahl 9 gibt (266 §). Um nun die Dreieckszahl zu finden, brauchet man nur die Seitenzahl um 1 zu vermehren, und davon die Zweier zu suchen.

282 §. **Die Summe der Dreieckszahlen finden, wenn die Seitenzahl gegeben ist.**

Man vermehret die Seitenzahl um 2, und suchet die Dreier zu dieser Summe (267 §), welche die Summe der verlangten Dreiecks-

zahlen geben werden. Z. B. wie viel machen 8 Dreieckszahlen? 8 + 2 = 10. Die Dreier von 10 sind $\frac{10.9.8}{3.2} = 120$. So ist die Summe von 8 Dreieckszahlen = 120. Denn die Dreier der Zahl 10 geben alle Zweier der 9 übrigen Zahlen (272 §). Alle diese Zweier sind aber allen 8 Dreieckszahlen gleich (281 §). Die Dreier der Zahl 10 werden also 8 Dreieckszahlen enthalten.

283 §. Die Summe der Viereckszahlen aus der Seitenzahl finden.

1) Suchet man die Summe der Dreieckszahlen zu der Seitenzahl, und die Summe der Dreieckszahlen von der Seitenzahl, weniger 1. 2) Diese Dreieckszahlen werden zusammengezählet, und werden die Summe der Viereckszahlen geben. Z. B. die Seitenzahl sei 8: so ist die Summe der Dreieckszahlen davon $\frac{10.9.8}{3.2} = 120$, und die Dreieckszahlen von 8 − 1 = sind $\frac{9.8.7}{3.2} = 84$. Die Summe von 120 und 84 = 204 gibt alle Viereckszahlen von 8. Denn die Viereckszahlen entstehen aus der Staffelreihe 1, 3, 5, 7 u. s. w. (276 §) Diese Staffelreihe entsteht aber: wenn 2 ungleiche Staffelreihen für Drei-

ecks-

eckszahlen zusammengezählet werden, wovon eine Reihe zum ersten Gliede 0 hat. Z. B.

1,	2,	3,	4,	5,	6
0,	1,	2,	3,	4,	5
1,	3,	5,	7,	9,	11

Deßwegen müssen die Viereckszahlen aus 2 ungleichen Reihen Dreieckszahlen bestehen, welches bei der Zergliederung der Viereckszahlen erhellet. Z. B.

1 = 1	Die erste Ordnung enthält die Viereckszahlen,
4 = 3 + 1	die zweyte die Dreiecks-
9 = 6 + 3	zahlen, wie auch die drit-
16 = 10 + 6	te, [illegible]e aber ein Glied
25 = 15 + 10	

weniger hat.

284 §. Die Summen der Vieleckszahlen nennet man Piramidalzahlen; weil sie Piramiden ausmachen, wenn man die Einheiten als so viel Punkte ansieht, und aufhäufet, wie man an Kugelhaufen in den Zeughäusern sehen kann.

285 §. **Die Kugeln eines dreieckigen Kugelhaufens finden: wenn man die Seitenzahl der Grundlage weiß.**

Die Seitenzahl wird um 2 vermehret, und zu dieser neuen Zahl werden die Dreier gesuchet; weil die Kugelschichten Dreiecks-

zahlen vorstellen (282 §). Z. B. es sind in der Seite der Grundlage 8 Kugeln: so hat der Haufen $\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2} = 120$ Kugeln.

286 §. **Alle Kugeln in einem viereckigen Haufen berechnen.**

Die Seitenzahl wird um 2 vermehret, und von der Summe werden die Dreier gesuchet, zu welchen man noch die Dreier der Zahl zählet, die um 1 grösser ist, als die Seitenzahl (283 §). Z. B. im letzten Vierecke liegen 8 Kugeln in der Seite: so sind die Dreier davon $\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2} = 120$.

$$\frac{9\times 8\times 7}{3\times 2} = 84$$

der ganze Haufen = 204

287 §. **Alle Kugeln finden: wenn der Haufen sich in eine Reihe Kugeln endiget.**

1) Suchet man die Summe der Staffelreihe, wozu die oberste Reihe Kugeln das erste Glied und die Steigzahl gibt, und die Schichten die Gliederzahlen bestimmen.

2) Suchet man die Summe von so viel Viereckszahlen, als Schichten sind, weniger 1 (283 §).

3)

3) Suchet man die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis auf die Schichtenzahl, weniger 1 (200 §). Diese 3 Summen werden den ganzen länglichen Kugelhaufen geben. Z. B. der lange Haufen hat 10 Schichten, und die oberste Reihe enthält 30 Kugeln.

Die erste Summe gibt			1650
Die zweite	—	—	285
Die dritte	—	—	45
Der ganze Haufen		=	1980

Diese Berechnung gründet sich auf die Lage der Kugeln. Denn liegen in der obersten Reihe ihrer 30: so müssen darunter schon 2 Reihen, jede von 30 + 1 Kugel liegen; weil immer eine Kugel zwischen zwoen liegt. Darunter liegen 3 Reihen, jede von 30 + 2 Kugeln u. s. w. Jede Reihe werde mit der Anzahl derselben vervielfältiget: so findet man alle Kugeln in jeder Lage. Der lange Haufen wird sich allso folgender Gestalt vorstellen lassen:

Die oberste Reihe	= 30 — —	=	30
Die zweite Lage	= 30 + 1 × 2	=	60 + 2
Die dritte —	= 30 + 2 × 3	=	90 + 6
Die vierte —	= 30 + 3 × 4	=	120 + 12

Die letzte Reihe läßt sich so zergliedern:

$$\left.\begin{array}{l} 2 = 1+1 \\ 6 = 2+4 \\ 12 = 3+9 \end{array}\right\}.$$

So

So besteht der ganze Haufen aus der Summe von dreierlei Reihen. Die erste ist eine Unterschiedsreihe, wozu die oberste Kugelreihe das erste Glied und die Steigzahl ist, zur Gliederzahl aber die Schichtenzahl genommen wird. Die zweite enthält die natürlichen Zahlen von 1 bis auf die Schichtenzahl weniger 1. Die dritte besteht aus den Vierecksszahlen der zweiten Reihe.

XXI Hauptstück.

Von den Versetzungen.

288 §. Dinge werden versetzet: wenn sie ihre vorige Ordnung verändern. Eine **Versetzung** ist deßwegen eine andere Ordnung der Dinge. Z. B. ab, ba.

289 §. Zwei Dinge lassen sich nur zweimal versetzen, als ab, ba. Kömmt zu diesen beiden Buchstaben der dritte: so kann er in beiden Versetzungen ab und ba vornen, in der Mitte, oder hinten stehen, als: cab, cba, acb, bca, abc, bac. Drei Buchstaben haben allso 2mal 3 = 6 Versetzungen.

290 §. Nimmt man zu dreien Buchstaben den vierten d: so kann er bei einer Versetzung der 3 Buchstaben hinten und vornen, und zweimal in der Mitte, in allem 4mal

zu

zu stehen kommen. Da nun 6 dergleichen Dreier da sind: so wird man durch 4 Buchstaben 4mal 6 = 24 Versetzungen bekommen.

291 §. Wird nun zu jeder Anzahl Dinge noch ein anderes gesetzet: so wird dieses so vielmal bei den Versetzungen der vorigen Dinge stehen können, als die Ordnungszahl des letzten Dinges Einheiten hat. Die Versetzungen einer jeden Anzahl werden deßwegen aus den Versetzungen der vorhergehenden Anzahl Dinge bestimmet.

292 §. Die Versetzungen jeder Anzahl Dinge finden.

Man schreibt eine Reihe Zahlen von 1 angerechnet bis auf die gegebene Anzahl hin. Die erste Zahl wird mit der folgenden vervielfältiget; dieser Inhalt wieder mit der folgenden; und so fort der letzte Inhalt mit der folgenden Zahl: so wird der allerletzte Inhalt die Versetzungen der ganzen Anzahl geben. Z. B. wie oft können sich 6 Personen an einem Tische versetzen, und immer eine andere Ordnung machen? Setzet die Zahlen wie folget.

1 — —	1
2 — —	2
3 — —	6
4 — -	24
5 —	120
6 —	720

In der ersten Reihe stehen Personen von 1 bis 6; in der zweiten ist jeder Inhalt so gemacht worden: 1mal 1 ist 1; 1 mal 2 gibt 2, die Versetzungen für 2 Personen. 3mal 2 ist 6 für 3 Personen. 4mal 6 ist 24 für 4 Personen. 5mal 24 gibt 120 für 5 Personen. Endlich gibt 6mal 120 = 720 Versetzungen für 6 Personen.

XXII Hauptstück.

Anwendung der Rechenkunst für die Blinden.

293 §. Man hat es allezeit für ein Wunder angesehen: wenn Blinde sich an Dinge gewaget haben, die nur für Sehende bestimmet zu sein scheinen. Ein solches Wunder hat uns dieses Jahrhundert an Saundersonen, einem blinden Lehrer der Mathematik, gezeiget. Dieser erblickte im Jahre 1682 in Engelland das Licht der Welt. Im ersten Jahre seines Alters überfielen ihn die Blattern, welche ihm so stark zusetzeten, daß er nicht allein sein Gesicht, sondern auch die Augen selbst dabei einbüsete. Dieser frühzeitige Verlust zog natürlicher Weise auch diesen nach sich, daß er sich niemal einen Be-

griff

griff von dem Lichte und den Farben machen konnte. In seiner Jugend lernete Saunderson die lateinische und griechische Sprache. Sein Vatter brachte ihm etwas von der Rechenkunst bei, in welcher er durch sein Gedächtniß weit kam. Im 18ten Jahre unterwiesen ihn gute Freunde in der Meßkunst und Algebra, worin er es seinen Lehrmeistern bald vorthat. In seinem 25ten Jahre begab er sich auf die hohe Schule nach Cambridge, wo ihm seine Geschicklichkeit den Weg zu einem Lehrstuhle in der Mathmatik bahnete, welches Amt er mit grosem Ruhme bis an seinen Tod vertreten hat, welcher ihn im Jahre 1739 in dem 56ten Jahre seines Alters diesem Zeitlichen entriß. Von seiner Arbeit ist seine Algebra in 2 Theilen, aber nur für Sehende, an das Licht gekommen.

294 §. Da er wahrnahm, daß sein Gedächtniß, wie gros es sonst war, zu allen Ausrechnungen nicht hinreichete: verfiel er auf ein Mittel, den Abgang des Gesichtes durch das Gefühl zu ersetzen. Dieses Mittel bestund in einer viereckigen hölzernen Tafel, die etwas über einen Schuh gros war, und auf welcher sich viele gleichlaufende Linien durchkreuzeten. In dem Durchschnitte zwoer Linien waren überall Löcher geboret, in welche Zäpfchen gestecket wurden, um jede

Zahl

damit auszudrücken. Für die 9 einfachen Ziffern wurden auch so viel Löcher genommen, die gemäs der Abtheilung ein kleines Viereck ausmacheten, und in folgender Ordnung gezeichnet waren. Das mittlere Loch bedeutete
9, 2, 3 ⎤ 1; das darüber stehende 2. Das
8, 1, 4 ⎬ Loch neben 2 im rechten Obereck
7, 6, 5 ⎦ bedeutete 3; auf derselbigen
Seite bemerckete das Loch, welches unter 3 stund, die Zahl 4. Das Loch im rechten Unterecke war für die Zahl 5 u. s. w. allso, daß 9 die Ordnung im linken Oberecke beschloß, und alle Ziffern gleichsam eine viereckige Schneckenlinie machten s. die 2te Fig. Um nun Zahlen zu schreiben, hatte er Zäpfchen von zweierlei Grösse, nämlich längere und kürzere. Die längere stunden beständig im mittlern Loche, und dieneten theils die Richtung der Zahlen zu beobachten, theils jede Ziffer durch das Gefühl zu erkennen. Die kürzern waren zu den Ziffern bestimmet, die er aus der Lage gegen das lange Zäpfchen erkannte; nämlich, wenn das Zäpfchen in 2 stund: so erinnerte sich unser blinder Rechner dadurch an die Ziffer 2, indem er das Zahlzäpfchen gerad über dem langen fühlete, und so bei den andern. Wenn er aber 1 zeichnen wollte: so nahm er das lange Zäpfchen heraus, und setzte an dessen Platz ein kurzes: so bedeutete es eine Nulle. Diese zwei-

erlei

erlei Zäpfchen hatte Saunderson in 2 Büchsen vor sich stehen, und rechnete damit sehr geschwind(*). Eben diese Tafel war mit einer kleinen Rahme eingefasset, welche Einschnitte hatte, die ½ Zoll voneinander entfernet waren, und ohne Zweifel dazu dieneten, damit nicht eine Reihe Zahlen in die andere geschrieben würde, und folglich Verwirrung entstünde. Sie dienete ihm auch, die Figuren zur Mathematik darauf zu zeichnen, worin er ziemlich geschwind war. Denn er wund einen Faden um seine Zäpfchen; und so war die Figur gemacht (**). Die Art aber alle Figuren zu zeichnen, besonders welche krumme Linien erfodern, hat er nicht bekannt gemacht. Sein Nachfolger im Lehramte, der die saundersonische Rechnungsart aus der hinterlass-

(*) Herr Royer, Schreib- und Rechenmeister zu Versailles, hat im Avantcoureur vom 26ten October 1772 ein ähnliches Rechentäfelchen, aber nur für Sehende bekannt gemacht. Die Zäpfchen sind von Helfenbeine, worauf oben die Ziffern gezeichnet sind. Ein kleines Dintenfaß ist dabei, um die Ziffern abzuschreiben. Die ganze Tafel steht in einer Büchse von Bleche. Man brauchet die Büchse nur gesehen zu haben, um von ihrer Unzulänglichkeit zu urtheilen.

(**) Meinem Schüler habe ich deutlichere Figuren gemacht, die wie ein Buch zusammen gebunden und für immer aufgehoben werden.

lassenen Arbeit des blinden Lehrers mit groser Mühe entziffert, und beschrieben hat, meldet auch nicht, wie er die algebraischen Rechnungen auf dieser Tafel ausgeführet hat. Die erste Figur stellet hier seine Tafel vor, wie sie in seiner Algebra gezeichnet ist.

295 §. Saunderson hat allso mehr für Sehende als Blinde gesorget. Vielleicht ist es ihm nicht einmal beigefallen, daß auch andere Blinde aus seiner Erfindung Nutzen schöpfen könnten. Einen Versuch mit seiner Rechnungsart habe ich an dem H. Weißenburg, einem Sohne des hiesigen kuhrfürstlichen H. Kammerdieners gleiches Namens, mit glücklichem Erfolge gemachet. Diesen hat auch das Unglück getroffen, daß er durch die Blattern, welche ihn im 7ten Jahre seines Alters heimsuchten, sein Gesicht völlig verlor. Vor dem jetzt gemeldeten Versuche hatte er, wie leicht zu denken ist, nicht den geringsten Begriff vom Rechnen; er wollte kaum glauben, daß es möglich wäre, daß ein Blinder es lernen könnte. Dessen ungeachtet hat er hernach solchen Fortgang darin gemachet, daß er die Zuschauer jetzt in Erstaunen setzet. Er zeiget seine Geschicklichkeit nicht blos in solchen gemeinen Rechnungen, die man täglich brauchet; die ganze Rechenkunst, wie sie in dem vorhergehenden be-

schrieb-

schrieben worden ist, hat er in seiner Macht, wobei er Geschwindigkeit, und die gründlichste Einsicht zeiget. Wircklich ist er mit den algebraischen Rechnungen, die vom zweiten Grade nicht ausgenommen, und mit der Flächen- und Körpermeßkunst beschäftiget, die ihm keine grösere Beschwerniß machen, als einem Sehenden. Mit dem grösten Verlangen wartet er auf die übrigen Theile der mathematischen Wissenschaften.

296 §. Bei seiner Unterweisung habe ich das saundersonische Viereck zum Grunde genommen, und darin 9 gleiche Löcher boren lassen, die ich in dieser Ordnung, weil

1, 2, 3 s. die 3te Fig. ⎫ jede willkührlich ist, be-
4, 5, 6 ⎬ nennet habe. Zu dies-
7, 8, 9 ⎭ en Löchern habe ich

hölzerne Zäpfchen oder Nägel drechseln lassen, die an beiden Enden abgeründet sind, damit sie leicht in das Loch gehen. In der Mitte sind sie etwas dicker, damit sie immer passen: wenn die Löcher durch den langen Gebrauch sich erweitern sollten. Man kann sich dieselben aus festem Holze leicht selbst schnitzen. Man machet sie so klein, daß man sie gemächlich fassen kann. Die Zäpfchen hat der blinde Rechner in einem Beutel, oder in einer Büchse vor sich. Die durch-

löch-

löcherten Vierecke stehen auf einer dünnen Tafel von Holze, die 5 Zolle weniger 2 Linien französisches Maases breit, und 6 $\frac{1}{2}$ Zoll lang, und $\frac{1}{4}$ Zoll dick ist. Die Vierecke sind durch einen Einschnitt (die Schreiner nennen ihn Nute), der 2 Linien beträgt, voneinander abgesöndert, und zwar, welches die Hauptsache dabei ist, solchergestalt, daß die Vierecke scharfe Seiten bekommen, damit der Blinde dieselben durch das Gefühl in einem Augenblicke erkennen könne, wenn er nur die Hand darauf leget. Durch diesen Einschnitt, welcher in den saundersonischen Tafeln fehlet, habe ich so viel gewonnen, daß der Blinde viele Zeit und Mühe sparet. Denn zu einer Ziffer brauchet er keine zweierlei Zäpfchen, wie Saunderson, sondern nur eins. In der 1ten und 4ten Fig. bemerket die gezeichnete Zahl 205 diesen Unterschied.

297 §. In dem Einschnitte zwischen jedem Vierecke sind auch noch Löcher geboret, welche zu vielerlei Diensten bestimmet sind. Erstlich dienen sie, jede Zahl zu schliesen, zu welchem Ende man ein Zäpfchen neben das letzte Viereck in den Einschnitt stecket. Dieses ist besonders bei Nullen gut; indem ich dazu ein leeres Viereck brauche. Zweitens werden die Löcher in dem Einschnitte gebrauchet,

die

die Brüche zu zeichnen. Drittens sind sie zu den algebraischen Rechnungen gar nützlich; weil ein einziges Zahlzäpfchen hinreichet, die Zeichen der Rechnungsarten, Gleichungen, der verschiedenen Würden und Wurzeln auszudrücken. Wenn die Löcher ganz durchgeboret werden: so stellet die untere Fläche eine saundersonische Tafel vor, wozu man aber zweierlei Zäpfchen brauchet. Die Einschnitte, die ich gemacht habe, geben meinen Tafeln das Ansehen eines Waffeleisens. An zweien Schrägecken ist ein Aug und Angel angebracht, um alle Tafeln, wenn es die Noth erfodert, aneinander zu henken; sie alsdann in die Länge auszustrecken, oder in ein groses Viereck zu versetzen. Dergleichen Tafeln habe ich vier verfertiget, die sich im Sacke leicht nachtragen lassen, die man aber nicht alle brauchet. Zur Gemächlichkeit habe ich eine Schachtel von Pappedeckel gemacht, in welcher sich 8 kleine Abtheilungen befinden, wovon eine für die Zahlzäpfchen, die übrigen aber zu den algebraischen Buchstaben bestimmet sind. Unter dem Boden werden 2 Tafeln in ein Futteral geschoben: alsdann hat man sein ganzes Rechnungszeug beisammen. Durch eine kleine Veränderung habe ich dieses so eingerichtet, daß man aufgeschriebene Zahlen

im Sacke nachtragen kann, ohne daß sie herausfallen.

Herr Weissenburg hat auch besondere Sacktäfelchen, worauf die Vierecke viel kleiner sind. Die Zäpfchen dazu sind aus Drate verfertiget. Zu Hause brauchet er eine Tafel, welche 19 kleine Vierecke in der Länge: und 14 in der Breite hat. Sie machet einen Einsatz in einem Kästchen aus, welcher zur Rechten 2 Schubladen hat; die Zäpfchen aufzubehalten. Diese Tafel ist zur Algebra ungemein gemächlich, und man kann sie leicht verschliesen.

Die Lehrart für Blinde.

298 §. Da bei dieser Art zu rechnen der Hauptsinn das Gefühl ist: so läßt man den blinden Lehrling die Tafel durchaus wohl befühlen, damit er sich damit bekannt mache. Darauf führet man seine Finger von einem Loche zum andern, und spricht ihm die dazu gehörigen Ziffern so lang vor, bis er sie gefasset hat. Da die Vierecke scharfe Seiten haben: so geben die Ecke das kennbarste Merkzeichen, indem man dieselben alsbald fühlet, wenn man nur die Hand auf die Tafel leget. Hier machet man den Blinden aufmerksam, und läßt die Ziffern erst aus den 4 Ecken, als den fühlbarsten Zeichen

erlern-

erlernen, nämlich: im linken Oberecke steht 1; im rechten Oberecke steht 3; im linken Unterecke ist 7, und im rechten Unterecke ist 9. Von den Eckziffern kömmt man leicht zu den andern. Denn in der Mitte des Vierecks steht 5; zwischen den beiden Oberecken ist 2; zwischen den Unterecken 8; zwischen den beiden linken Ecken ist 4, und 6 ist zwischen den beiden rechten Ecken. Hat man den Blinden auf solche Art lang geübet: so wird er die Ordnung der Zahlen leicht fassen, und behalten. Darauf bestecket man die Löcher mit Zäpfchen, und läßt ihn die Ziffern, eine nach der andern aussprechen. Unterdessen hat der Lehrer sich bei dem Unterweisen wohl zu erinnern, daß er einen blinden Lehrling vor sich hat, wenn seine Lehren nach seinem Wunsche nicht alsbald begriffen werden. Er muß Geduld haben, und ihm die Begriffe fühlbar machen. Sind aber die Begriffe einmal gefasset; so kleben sie auch. Der so scharfsinnige und geschickte Saunderson hat dieses gleichfalls an sich bemerket. Es ist aber kein Wunder, wenn unsere Ausdrücke einem Blinden in einer ganz unbekannten Sache dunckel vorkommen. In unsere Begriffe mischen sich unvermerket Kennzeichen, die nur in die Augen fallen, und sie werden deßwegen dem Blinden unbegreiflich. Mischet

der Lehrer noch die fremde Sprache in seine Lehren: so wird er sich auch mehr Mühe machen. Ueberhaupt muß der Lehrer die Finger des Blinden, welche jetzt seine Augen sind, beständig herumführen, und dieselben über eine ganze Reihe Vierecke streichen, damit die Vorstellungen auch aneinander hangen, und eine der andern helfen könne.

Das Schreiben und Aussprechen der Zahlen.

299 §. Im Schreiben und Aussprechen der Zahlen beobachtet der Blinde mit dem Sehenden einerlei Ordnung, die oben beschrieben worden ist (4 §.). Die verschiedenen Stellen der Zahlen kommen dem Blinden gar deutlich vor, besonders wenn man ihn von Anfange gewöhnet, die Einser bei dem rechten Rande anzufangen, und zur Linken fortzuschreiben. In diesem Falle enthält das erste Viereck nichts, als Einser, deren höchstens 9 darin Platz haben. Das zweite nimmt die Zehner auf, deren höchstens 90 darauf gehen. Kömmt zu 90 noch 1 Zehner: so wird daraus ein Hundert, und dieses, wird in das dritte Viereck getragen. In diesem Vierecke ist nur Platz für 900: wenn darum noch 1 Hundert dazu kömmt: so gibt es 10 Hundert, wofür in dem Vierecke kein Platz mehr ist. 10 Hundert macht

aber,

aber 1 Tausend, und geht in das andere Viereck über u. s. w. Den Anfängern zeichnet man Million, und Billion oben mit kleinen Einschnitten. Meine Tafeln sind so eingerichtet, daß der Länge nach nur Million darauf geht. Nachdem nun dieser Begriff gemachet ist: so schreibt man ihm allerhand Zahlen vor, fängt aber mit kleinen an. Man kann auch jedes Viereck für die Einser gelten lassen: alsdann muß man aber bemerken, daß das vorstehende Viereck für die Zehner ist: und die Einser werden mit einem Schlußzäpfchen in dem Einschnitte begleitet, damit keine Irrung entstehe. Diese Art Zahlen zu schreiben lehret man aber eher nicht, bis der Lehrling sich einen dauerhaften Begriff durch die Uebung zuwege gebracht hat.

Die Zusammenziehung.

300 §. Der Blinde zieht mehrere Zahlen zusammen, wie der Sehende. Wenn der erstere im Eins und eins geübet ist (11 §): so hat er vor dem Sehenden etwas darin vor, daß er ganz bequem zusammenzählen kann, ohne etwas im Sinne zu behalten; und alsdann kann er rechts oder links anfangen. Anstatt eines Striches den man auf dem Papiere machet, kann er in den Einschnitt ein oder etliche Zäpfchen stecken.

Will er nun nichts im Sinne behalten: so schreibt er die Summe der Einser ganz hin. In der zweiten Reihe zählet er den Zehner, wenn einer aus der Summe der Einser dahin gekommen ist, zu den andern Zehnern, und verändert nur das Zäpfchen, wenn eine andere Ziffer herauskäme; und so verfährt er mit allen Zahlen. Z. B. 6, 9, 7 macht 22: der Rechner schreibt 22 ganz hin. Jetzt saget er: 2, 7, 8, 2 macht 19. Aus der vorigen 2 machet er 9, und setzet 1 in die andere Reihe, und spricht: 1, 3, 4, 7 gibt 15. Aus 1 wird 5 gemachet, und 1 von 15 wird in die Reihe der Tausende geschrieben.

726
489
377
22
19
15

Hier sieht man, daß das Zusammenzählen auf der Tafel leichter ist, als auf dem Papiere; weil die Zäpfchen nur versetzet werden, da man auf dem Papiere eine Ziffer ausstreichen, und eine andere dafür hinschreiben muß. Will der Blinde links anfangen: so spricht er: 3, 4, 7 gibt 14, die er hinschreibt. 7, 8, 2 macht 17, davon geht 1 in das Viereck, worauf 4 steht, welche 4 nun in 5 verwandelt wird: alsdann hat er schon 157. Er spricht weiter: 7, 9, 6 machet 22, 2 geht zu dem Zehnern 7, und gibt nun 9, die andere 2 bleibt bei den Einsern: so ist die ganze Summe 1592, wie vorhin. Der Blinde untersuchet seine Arbeit, wie der Sehende (19 §).

Die

Die Abziehung.

301 §. Der Blinde zieht ab, wie der Sehende (22 §); und kann wieder rechts oder links anfangen. Z. B. wenn der

```
 70005
  2376
------
 67629
```

Blinde sich nicht erinnern will, daß die Nullen dieses Musters 9 bedeuten: so kann er dieselben unschwer in 9 verwandeln, und die letzte Zahl 7 in 6; anstatt 5 schreibt er 15, allso, daß 1 noch über die letzte 9 zustehen komme, welches die Abziehung gar deutlich machet, wie hier neben zu sehen ist.

```
     1
 69995
  2376
------
 67629
```

Nun zieht er ab, und spricht: 6 von 15 bleibt 9. 7 von 9 läßt 2. u. s. w.

Fängt aber der Blinde links an: so lehnet er von dem vorhergehenden Ueberschusse, und alle Nullen gelten 10. Z. B. nichts

```
 70005
  2376
------
 78739
 6762
```

von 7 läßt 7. 2 von 10 läßt 8. Er schreibt 8 hin, verwandelt 7 in 6; weil 1 davon zu 0 gelehnet worden ist. 3 von 10 läßt 7, welche hingeschrieben wird: die vorige wird in 7 verwandelt. 7 von 10 läßt 3: 7 wird in 6 verändert, und 3 hingesetzet. 6 von 15 läßt 9: aus 3 wird 2, und der gänzliche Ueberschuß ist 67629, wie

vorhin. Die Probe hat der Blinde mit dem Sehenden gemein (27 §).

Die Vervielfältigung.

302 §. Dem Blinden muß man das Einmaleins so oft vorsagen, oder vorsagen lassen, bis er es vollkommen auswendig weiß. Alsdann vervielfältiget er, wie ein Sehender; er kann aber folgende Vortheile anwenden.

Erstlich brauchet er wieder nichts im Sinne zu behalten. Z. B. 3mal 9 ist 27: er schreibt 27 ganz hin. 3mal 8 ist 24, und

```
 89
  3
---
 27
26
```

2 von den vorigen 27 gibt 26. Der ganze Inhalt ist 267. Anstatt auf dem Papiere auszustreichen, versetzet er das Zäpfchen aus 2 in 6 in demselbigen Vierecke. Er kann auch hier, wie im Abziehen links anfangen.

2) Wenn mit vielen Ziffern vervielfältiget wird: so schreibt der Blinde den Hauptinhalt ohne jeden Mittelinhalt zu bemerken. Z. B. wenn der Blinde den ersten Inhalt 267

```
  89
  23
----
 267
178
----
2047
```

hat: so fängt er an, und spricht: 2mal 9 ist 18, und 6 vom ersten Inhalte gibt 24. Hier verwandelt er 6 in 4, und 2 auch in 4, wenn er den Zehner nicht im Sinne auf-

aufbehalten will. 2mal 8 ist 16, und 2 vom ersten Inhalte gibt 18, und 2 im Sinne gibt 20; oder wenn er nichts im Sinne behalten hat: 16 und 4 macht 20. Der ganze Inhalt ist 2047.

303 §. Diese Vervielfältigungsart erfodert schon eine gewisse Stärke im Rechnen. Man lehret sie deßwegen nicht eher, bis der Blinde eine Fertigkeit, und einen deutlichen Begriff erlanget hat; alsdann kann sie zur Probe der gemeinen Art dienen.

Die Theilung.

304 §. Auch diese erlernet der Blinde wie der Sehende. Sobald er mit der gemeinen Art fertig ist: so lehret man ihn die kürzere (51 §). Ich lasse den Theiler über die Theilungszahl, und den Antheil auf eine zweite Tafel setzen, damit er die Probe desto leichter machen könne; indem er nur den Theiler unter den Antheil schreiben, und vervielfältigen darf.

305 §. Der Blinde kann leicht irren, wenn er nicht in Acht nimmt, in welchem Vierecke er für den Antheil anfangen soll. Dieses findet er aber, wenn er bemerket, in welchem Vierecke er die erste Frage thut. Fraget er in Hunderten: so ist auch die Antwort in Hunderten u. s. w. Muß er aber

zur Frage mehr als ein Viereck nehmen: so bestimmet das letzte Viereck der Frage, das Viereck in der Antwort. Z. B. hätte er in Hunderten und Zehnern gefraget: so käme die Antwort in den Zehnern zu stehen; weil das Hundert zum Theilen zu klein war. Was übrigens der Sehende noch bei der Theilung zu bemerken hat; das geht den Blinden auch an.

306 §. Hat ein Blinder die Rechnungsarten vollkommen gefasset: so sind ihm alle Berechnungen leicht, wenn ihn das Gedächtniß nicht verläßt, womit dergleichen Leute sonst wohl versehen sind; weil sie sich darin alle Begebenheiten verzeichnen müssen. In den benamnten Zahlen muß er sich viererlei Stellen für die Einheiten bemerken, welches er aber füglich in den Einschnitten thun kann. Z. B. er soll in Gulden, Kreuzern, und Pfenningen rechnen: so nimmt er eine Tafel von 5 Reihen, wenn seine Einnahme oder Ausgabe nicht in die Hunderte geht. Darauf gilt die erste Reihe zur Rechten für die Pfenninge, die 2 folgenden für die Kreuzer, und die übrigen für die Gulden. Im Zusammenziehen überschreitet zuweilen die Summe ihre Gränzen. Alsdann machet man die Pfenninge zu Kreuzern, und diese zu Gulden: so wird wieder jede Art in ihren Gränzen bleiben.

Die

Die Brüche.

307 §. Die Brüche werden auf der Tafel mit 2 Zahlen ausgedrücket, und durch ein Zwischenzäpfchen, wie auf dem Papiere mit einem Striche, unterschieden. Viele Brüche lassen sich füglicher auf der Tafel neben einander schreiben, wobei das Unterscheidungszäpfchen neben in dem Einschnitte dienlich ist.

Die Regel von Dreien.

308 §. In der Regel von Dreien habe ich anfänglich drei Tafeln, und für die unbekannte Zahl die vierte Tafel gebrauchet, um dem Lehrlinge einen deutlichen Begriff von dieser Regel zu machen. Es kam daraus auch noch dieser Vortheil, daß man die Zahlen so, wie sie vorgesaget wurden, aufschreiben, und mit den Tafeln gehörig versetzen konnte. So bald aber diese Regel von dem Schüler gründlich gefasset war: ließ ich ihn die Aufgaben auf einer Tafel ausarbeiten; die Glieder oder Zahlen stunden aber übereinander, und das Fragglied war das letzte.

Alle andere Arten von der Regel von Dreien haben gar keine Beschwerniß; sobald man mit der ersten zu Rechte kommen kann.

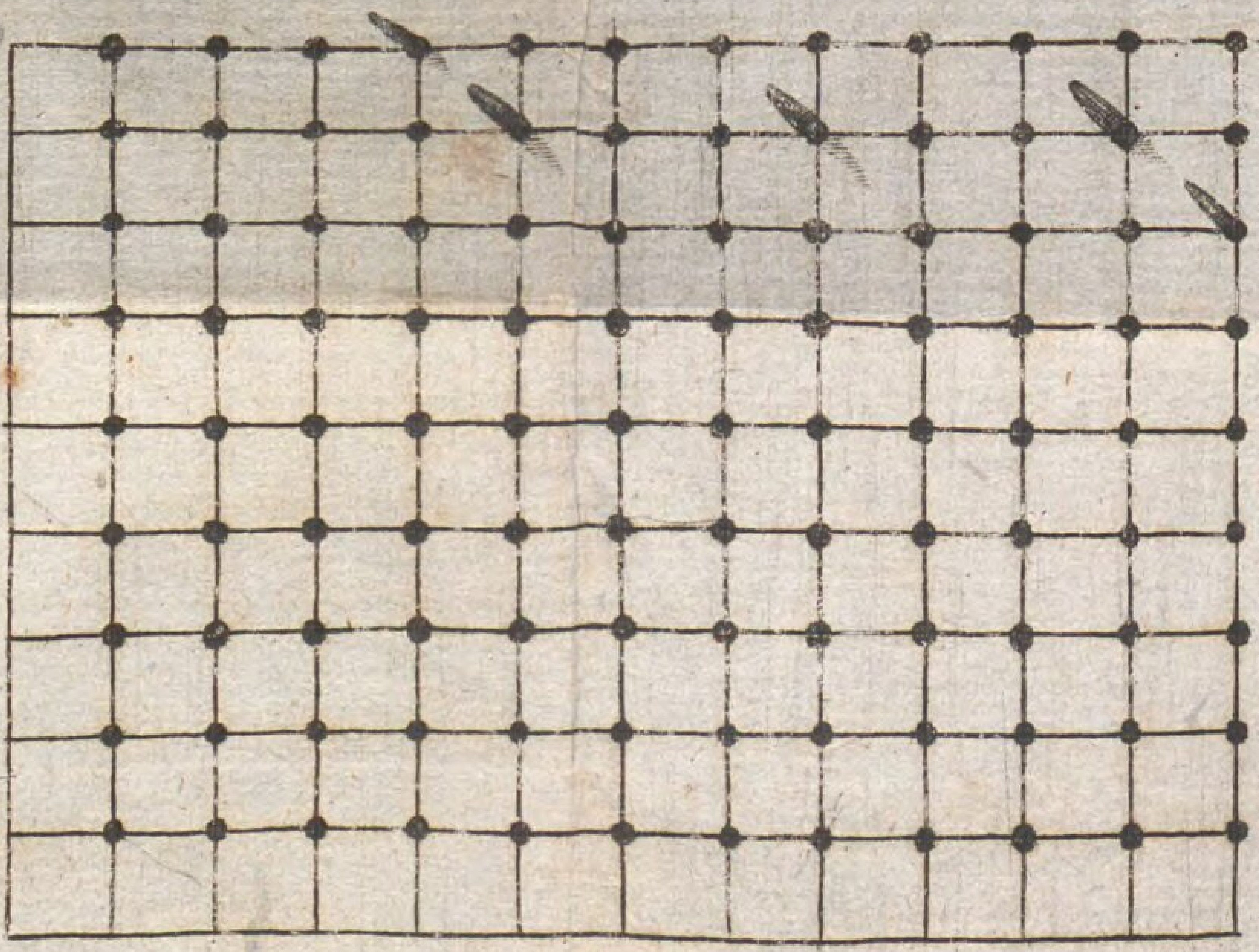
309 §. Mit dieser Kenntniß ist der Blinde im Stande die ganze Rechenkunst, wie sie in diesem Buche abgehandelt worden ist, zu erlernen, und auszuüben. Ein langer Gebrauch wird ihn selbst in den Stand setzen, Vortheile zu erfinden, die vom erheblichsten Nutzen sein können. Ich wünsche, daß meine Anleitung allen Blinden denjenigen Trost verschaffe, welchen mein Schüler daraus erlanget hat.

E N D E.

…he
…bliothek
München

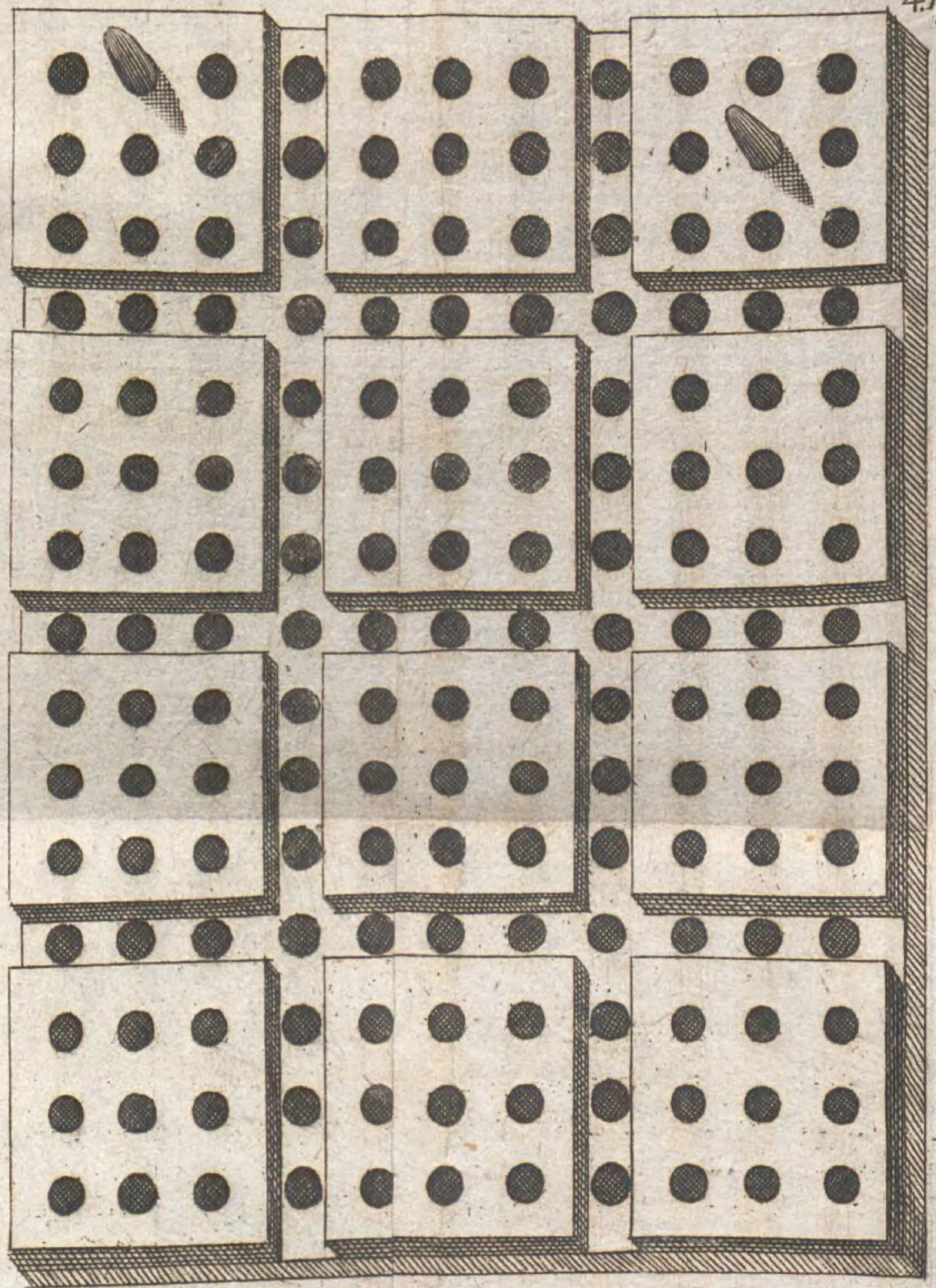
1.Fig.

205

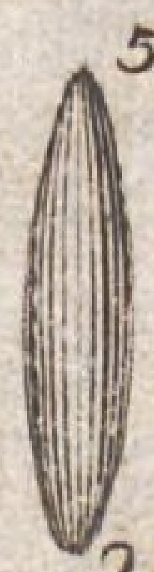


4.Fig.

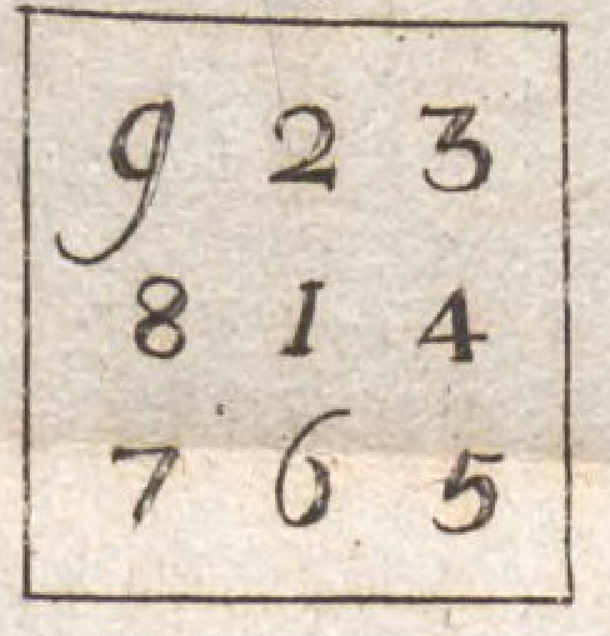
205

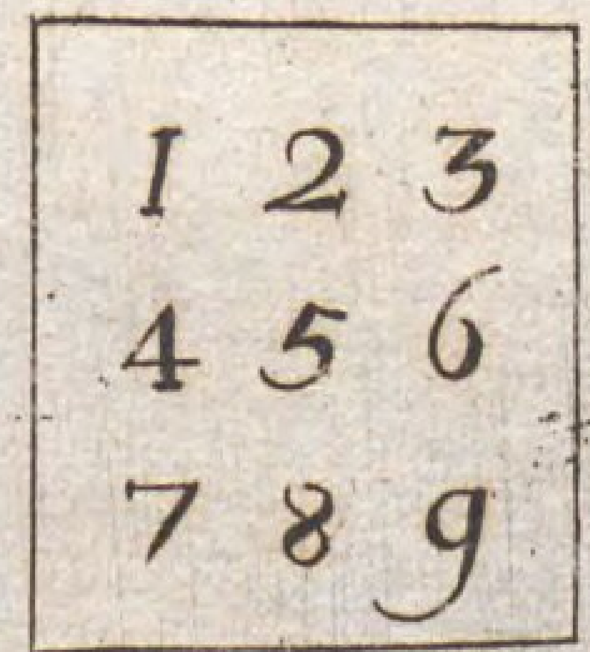


5.Fig.



2.Fig.





3.Fig.

Buchbinderei
R. Wawrzyniak

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Niese, Christian

Rechenkunst für Sehende und Blinde

Mannheim 1773

Math.p. 743 s
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083347-7
VD18 1284487X-002